VARIABLES ALÉATOIRES (1)

1. **a.** Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Prouver que la série $\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge pour tout $x \in]-1,1[$ et que sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soient $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$. On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte, le premier rayon étant envoyé à l'instant $t = 1$. La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser. Les tirs de laser sont indépendants. La bactérie ne meurt que quand elle a été touchée r fois par le rayon. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

b. Déterminer la loi de X.

c. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

---

2. Une boîte contient n numéros compris entre 1 et n (n pair). On tire au hasard l'un des numéros. On peut soit le conserver, soit le remettre dans la boîte pour un tirer un autre si on le juge trop faible. On note X le numéro final obtenu.

Stratégiquement, on choisit une barre b telle que, si le premier numéro tiré est inférieur ou égal à b, on effectue un second tirage, sinon on le conserve.

a. Déterminer la loi de X (on distinguera les cas $k \leq b$ et $k > b$).

b. Calculer l'espérance de X. Comment choisir b pour que cette espérance soit maximale ? Que vaut-elle alors ?

---

3. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une suite de tirages consistant à tirer une boule de l'urne, à regarder sa couleur et à la remettre dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur avant le tirage suivant. On note X_n le nombre de boules noires à l'issue du n-ième tirage ; en particulier, $X_0 = 1$.

a. Quelle est la loi de X_1 ? Celle de X_2 ?

b. Prouver que X_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

c. Soit A_n l'évènement « tirer une boule noire lors du n-ième tirage ». Déterminer la probabilité de A_{n+1}.

---

4. Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant appelé est $p \in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de correspondants obtenus.

a. Donner la loi de X (justifier).

b. La secrétaire appelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus lors du premier appel. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de correspondants joints lors de ce second appel.

i. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k \mid X = i)$.

ii. Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre (*indication* : on pourra utiliser, sans la prouver, l'identité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$).

iii. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

---

5. On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour déceler la présence éventuelle (test positif) d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec une probabilité p. On a pour cela deux méthodes :

Méthode 1 : on analyse le sang de chacune des N personnes ;

Méthode 2 : on regroupe les N individus en g groupes de n individus, et on mélange le sang des n individus d'un groupe dans une même éprouvette. Si le résultat d'un groupe est positif, on analyse alors le sang des n individus du groupe.

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire réelle X égale au nombre de groupes positifs.

b. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'analyses dans la deuxième méthode. Calculer l'espérance de Y.

c. Comparer les deux méthodes dans le cas où $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0{,}01$.

---

6. Soit X une variable aléatoire discrète réelle. On appelle *fonction de répartition* de X la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que pour tout réel x on ait $F_X(x) = P(X \leq x)$.

a. Montrer que F_X est croissante.

b. Prouver que $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, on a $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

c. Déterminer les limites de F_X en $+\infty$ et $-\infty$ (on pourra écrire $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, n]$).

d. Montrer que la fonction F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$. Quels sont ses points de discontinuité ?

e. Connaissant F_X, comment déterminer la loi de X ?

---

7. Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

a. On définit une nouvelle variable aléatoire par $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Déterminer l'espérance de Y.

b. On suppose $p = \dfrac{1}{2}$ et l'on pose $Z = \dfrac{a^X}{2n}$ $(a > 0)$. Déterminer l'espérance de Z.

---

8. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On souhaite prouver l'équivalence :

$$X \text{ a une espérance} \Leftrightarrow \text{la série } \sum_{n\geq 1} P(X \geq n) \text{ converge,}$$

et si tel est le cas, alors : $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

a. Prouver que pour $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{N} P(X \geq n) - NP(X \geq N+1)$.

b. Conclure en distinguant les deux sens de l'équivalence.

---

9. On observe en moyenne un accident d'avion tous les 25 jours. En août 2005, il y en a eu 5 en 22 jours. Supposons que ce soit un effet du hasard (et non, par exemple, d'une baisse de vigilance en matière de sécurité).

a. Sur la période 1995-2004, on a relevé en moyenne un crash pour 500000 vols. Quelle est la probabilité que les cinq avions du mois d'août 2005 se soient crashés ?

b. Soit X le nombre d'avions qui se crashent sur une période de 22 jours. Quelle loi suit X ? Évaluer $P(X \geq 5)$.

c. Découpons l'année en 16 tranches de 22 jours (!). Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 5 crashes au cours de l'une de ces tranches ?
