XMP 2021-2022

TOPOLOGIE DES ESPACES VECTORIELS NORMÉS (Feuille 1)

1. Soit E l'espace des fonctions numériques continues sur $[0,1]$. On pose, pour f dans E :

$$n_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad n_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

a. Prouver que n_∞ et n_1 définissent deux normes sur E.

b. Expliciter une constante k telle que $n_1(f) \le k\, n_\infty(f)$ pour tout f de E.

c. Démontrer que tout ouvert pour la norme n_1 est ouvert pour la norme n_∞.

d. Démontrer que n_1 et n_∞ ne sont pas équivalentes.

---

2. Pour tout réel a, on définit sur $\mathbb{R}[X]$ une application N_a en posant, pour $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

a. Prouver que N_a est une norme.

b. Prouver que N_0 et N_1 sont équivalentes. Généralisation ?

c. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la suite $(P_n) = \left((X/2)^n\right)$ est convergente au sens de la norme N_a, et déterminer alors sa limite.

d. Comparer N_1 et N_2.

---

3. Comparer les couples de normes (?) suivants :

a. Sur l'espace E des fonctions continues sur $[0,1]$, la norme n_1 et la norme n : $f \mapsto \int_0^1 \mathrm{e}^t |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

b. Sur l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, la norme n_∞ et la norme (?) n définie par :

$$n : f \mapsto |f(0)| + \sup_{0\le t\le 1} |f'(t)|\,.$$

(c) Sur l'espace E des fonctions continues sur $[0,1]$, la norme n_1 et la norme n' : $f \mapsto \int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t$.

---

4. On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels.

a. Pour $P \in E$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on note $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N_\infty(P) = \max_{k=0,\dots,n} |a_k|$.

Montrer que l'on définit ainsi deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est ouvert pour la norme N_1.

c. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

d. On fixe un entier k et l'on note $N_{1,k}$ et $N_{\infty,k}$ les restrictions de N_1 et de N_∞ au sous-espace $\mathbb{R}_k[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à k. Les normes $N_{1,k}$ et $N_{\infty,k}$ sont-elles équivalentes ?

---

5. Soit (F_n) une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de compacts non vides. Prouver que l'intersection des F_n est non vide. Prouver que la conclusion tombe en défaut si les F_n sont simplement supposés fermés.

Frédéric Dupré, classe de MP du lycée Camille Vernet, Valence

6. Soit p un entier non nul quelconque. Pour $X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on pose :

$$N_p((x_1,\dots,x_n))=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}\ .$$

a. Prouver que l'application $x\mapsto x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

b. Soient X et Y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ tels que $N_p(X)+N_p(Y)=1$.

En écrivant $a+b=N_p(X)\dfrac{a}{N_p(X)}+N_p(Y)\dfrac{b}{N_p(Y)}$, prouver pour tous réels positifs a et b l'inégalité :

$$(a+b)^p\le N_p(X)\frac{a^p}{N_p(X)^p}+N_p(Y)\frac{b^p}{N_p(Y)^p}\ .$$

En déduire que $N_p(X+Y)\le 1$.

c. Prouver que N_p définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

d. Déterminer, pour X fixé dans $\mathbb{R}^n$, la limite de la suite $(N_p(X))_p$.

e. Prouver que ces normes N_p sont équivalentes entre elles.

---

7. Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E.

a. Rappeler la définition de l'adhérence d'une partie de E.

b. Prouver que $A\subset B\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$.

c. Montrer que $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ (*Remarque :* une réponse sans les suites est aussi acceptée).

d. Montrer que $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$, et que cette inclusion peut être stricte (on prendra $E=\mathbb{R}$).

---

8. **a.** Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme N_∞. Prouver que l'hyperbole d'équation $xy=1$ est fermée.

b. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme définie par $N(A)=\sup\limits_{i,j}\left|a_{i,j}\right|$. L'ensemble T des matrices triangulaires supérieures est-il ouvert ? fermé ? compact ?

c. On considère l'espace E des fonctions continues sur $[0,1]$ et l'ensemble $N=\left\{f\in E\ /\ f(0)=0\right\}$.

E étant muni de la norme n_1, N est-il ouvert ? fermé ?

Mêmes questions en munissant E de la norme n_∞

d.* L'espace des suites réelles bornées est muni de la norme N_∞. Le sous-espace des suites convergentes est-il ouvert ? fermé ?

---

9. Soit E un espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel de E.

a. Prouver que l'adhérence $\overline{F}$ de F est encore un sous-espace de E.

b. On suppose $F\ne E$. Que dire de $\overset{\circ}{F}$?

---

10. Soit (x_n) une suite convergente de limite L. On souhaite prouver que l'ensemble $F=\left\{x_n,n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{L\right\}$ est fermé. Soit a est un point qui n'est pas dans F.

a. En utilisant le fait que $a\ne L$, prouver l'existence d'un réel $r>0$ tel que $\left\{n\in\mathbb{N}\ /\ d(x_n,a)<r\right\}$ est fini.

b. Conclure.

(c) Prouver que F est compact.

---

11. Soient (E_1,N_1) et (E_2,N_2) deux espaces vectoriels normés, et (E,N) leur espace produit. On donne une partie A de E_1 et une partie B de E_2. En supposant A et B ouverts (respectivement fermés), $A\times B$ est-il ouvert (respectivement fermé) dans E ?