SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS (1)

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

a. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$. **b.** $f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$. **c.** $f_n(x) = \sin x\,\mathrm{e}^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$.

d. $f_n(x) = x^n \sin \pi x$ sur $[0,1]$. **e.** $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. **f.** $f_n(x) = \sin \dfrac{n+1}{n} x$ sur $[a,b]$.

---

2. **a.** Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E, (f_n) une suite de fonctions continues de A dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers une fonction f, et enfin (x_n) une suite d'éléments de A convergeant vers $a \in A$. Que dire de la suite $\big(f_n(x_n)\big)$? Ce résultat subsiste-t-il en cas de convergence simple ?

b. Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers f. Quelles hypothèses raisonnables doit-on faire sur une fonction numérique g pour que la suite $(g \circ f_n)$ converge simplement ? uniformément ?

c. Soit (f_n) une suite de fonctions uniformément continues sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, convergeant uniformément sur A vers une fonction f. f est-elle uniformément continue ?

d*. Soit (f_n) une suite de fonctions k-lipschitziennes, convergeant simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f. Prouver que f est k-lipschitzienne, et que la convergence est uniforme.

---

3. On définit une suite de polynômes sur $[0,1]$ par :

$$P_0 = 0 \quad ; \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n(x)^2}{2}.$$

a. Prouver que pour tout entier n et pour tout x de $[0,1]$, on a $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$.

b. En déduire la convergence simple de la suite (P_n) vers une limite que l'on précisera.

c. Prouver que cette convergence est uniforme.

d. Construire une suite de polynômes convergeant uniformément sur $[-1,1]$ vers la valeur absolue.

---

4. On considère les deux suites de polynômes suivantes :

$$P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \ldots + \frac{X^n}{n!} \quad ; \quad Q_n = (1 + \frac{X}{n})^n.$$

a. Étudier la convergence simple de ces deux suites sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver que ces suites convergent uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ de la forme $[-A, A]$.

c. Comparer les coefficients de X^k ($k \in [[0,n]]$) dans P_n et dans Q_n.

d. En déduire que la suite (Q_n) converge simplement sur $\mathbb{C}$, la convergence étant uniforme sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $A > 0$. Quelle est la limite simple de la suite (Q_n) ?

---

5. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Prouver l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f et telle que la suite (P_n') converge uniformément vers f'.

---

6. On pose, quand c'est possible, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 + x^3}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f, prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, qu'elle y décroît, et déterminer sa limite en $+\infty$.

b. Donner, par comparaison avec une intégrale, un équivalent de f en $+\infty$.

c. On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3 + x^3}$. Donner le domaine de définition de g, sa limite en 0 puis un équivalent de g en 0.

---

7. **a.** Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers g.

b. On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} \mathrm{e}^{-nx^2}$.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$, sur $[a,+\infty[$ $(a > 0)$, sur $]0,+\infty[$?

---

8. **a.** Soit X un ensemble, et (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ convergeant simplement sur X vers une certaine fonction f. On suppose l'existence d'une suite (x_n) d'éléments de X telle que la suite $\big(f_n(x_n) - f(x_n)\big)$ ne tende pas vers 0. Prouver que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de la suite (f_n), sa convergence uniforme sur $]a,+\infty[$ $(a > 0)$ puis sur $]0,+\infty[$.

---

9. **a.** Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un ensemble X à valeurs dans $\mathbb{C}$. Rappeler les définitions de la convergence normale et de la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$.

b. Prouver que la convergence normale entraine la convergence uniforme.

c. Convergence uniforme de la série $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R > 0$?

---

10. On considère la série de fonctions $\sum u_n$ où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0,1],\ u_n(x) = \ln(1 + \frac{x}{n}) - \frac{x}{n}$. En cas de convergence, sa somme sera notée S.

a. Prouver que S est définie et dérivable sur $[0,1]$.

b. Calculer $S'(1)$.

---

11. **a.** Soit A une partie de $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$. Prouver l'implication :

la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément $\Rightarrow$ la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0.

b. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, $f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. Cette convergence est-elle uniforme ?
