SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS (2)

1. Prouver que l'on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\arctan(n+x) - \arctan n\big).$$

Donner une relation liant $f(x+1)$ et $f(x)$, et déterminer la limite de f en $+\infty$.

---

2. On pose, quand c'est possible, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

a. Donner le domaine de définition D de g, et prouver que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Prouver que $xg(x) - g(x+1)$ est constante sur D. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.

c. Déterminer des équivalents de g en $+\infty$ et en 0^+.

---

3. Pour $x > 0$, on pose $\psi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

a. Donner une relation reliant $\psi(x)$ et $\zeta(x)$ pour $x > 1$.

b. Prouver que ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Prouver que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (attention !). Retrouver l'équivalent de ζ au voisinage de 1.

On pose désormais, pour x élément de $]1,2]$ et $n > 0$, $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

c. Prouver que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $]1,2]$ et exprimer sa somme à l'aide de la fonction ζ de Riemann.

d. Déterminer la limite en 1 de la fonction u_n et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(\zeta(x) - \frac{1}{x-1}\right)$.

e. Déterminer la somme de la série $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

---

4. On pose, pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{\cos\frac{x}{n}}{2^n}$ et, quand c'est possible, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\frac{x}{n}}{2^n}$.

a. Prouver que chaque fonction f_N est périodique, et en déterminer une période.

b. Prouver que la suite (f_N) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

c. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

d. Résoudre l'équation $f(x) = 2$ et en déduire que f n'est pas périodique.

---

5. Soit r un réel élément de $[0,1[$ fixé.

a. Prouver la convergence de la série de fonctions (de θ) $\sum r^n \sin n\theta$, et calculer sa somme.

b. Prouver de même la convergence de la série $\displaystyle\sum r^n \frac{\cos n\theta}{n}$. Calculer la somme de cette série.

d. Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r\cos\theta + r^2)\,\mathrm{d}\theta$.

e. Prouver que pour $|r| > 1$, l'intégrale envisagée à la question **c.** a un sens, et la calculer.

---

6. On définit par récurrence sur $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ une suite de fonctions en posant $f_0 = 0$ et pour $n \geq 0$,

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x f_n^2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

a. Prouver que $|f_n(x)| \leq 5/6$ pour tout x de I.

b. Prouver que pour tout $n \geq 1$, on a $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq 5/6 \|f_n - f_{n-1}\|_\infty$

c. Qu'en déduire concernant la série de fonctions $\sum (f_{n+1} - f_n)$?

Prouver que la suite (f_n) converge uniformément sur I. Soit f sa limite.

d. Prouver que f est une solution sur I de l'équation différentielle $y' = x^2 + y^2$ satisfaisant à $f(0) = 0$.

7.* Second théorème de Dini

Soit (f_n) une suite de fonctions numériques croissantes sur $[a,b]$ convergeant simplement vers une fonction continue f. Prouver que f est croissante et que la convergence est uniforme.

8.* Théorème de convergence radiale d'Abel

Soit $\sum a_n$ une série de complexes supposée convergente. On posera, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

a. Prouver que la série $\sum a_n x^n$ converge pour tout réel x de $]-1,1[$.

b. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. Prouver l'existence d'un rang N tel que $|R_n| \leq \varepsilon$ pour tout entier $n \geq N$.

c. Soient p et q deux entiers vérifiant $N \leq p < p$. En écrivant $a_n = R_{n-1} - R_n$ et en réarrangeant la somme, prouver que pour tout x de $[0,1[$, on a $\left|\sum_{n=p+1}^{q} a_n x^n\right| \leq 2\varepsilon$.

d. Prouver que la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1[$ et calculer $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

---

9. **a.** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la suite de ses dérivées $(f^{(n)})$ converge uniformément vers une certaine fonction φ. Que peut-on dire de φ ?

b. Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction φ. Prouver que φ est une fonction polynôme.

c. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ convergeant en un certain sens vers f bornée. A-t-on $\sup f_n \to \sup f$ en cas de convergence simple puis de convergence uniforme ?
