NORMES ET SUITES

1. Prouver que les applications suivantes sont des normes :

a. Pour $a \in \mathbb{R}$, l'application N_a définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $N_a(P) = \left|P(a)\right| + \int_0^1 \left|P'(t)\right| \mathrm{d}t$.

b. Sur l'espace E des fonctions numériques continues sur $[0,1]$, les applications :

$$n : f \mapsto \int_0^1 \mathrm{e}^t \left|f(t)\right| \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad n' : f \mapsto \int_0^1 t\left|f(t)\right| \mathrm{d}t$$

c. Sur l'espace des fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, $f \mapsto \left|f(0)\right| + n_\infty(f + f')$.

---

2. On considère l'espace E des fonctions numériques continues sur $[0,1]$, (f_n) une suite d'éléments de E et f un élément de E. On considère les deux assertions suivantes :

i. la suite (f_n) converge vers f au sens de la norme n_∞ ;

ii. pour tout t de $[0,1]$, la suite de réels $(f_n(t))$ converge vers $f(t)$.

a. Prouver l'implication *i.* $\Rightarrow$ *ii.*

b. Grâce à des fonctions faisant un « pic » sur $[0,1/n]$ et nulles ailleurs, prouver que l'on n'a pas *ii.* $\Rightarrow$ *i.*.

---

3. Étant données deux parties non vides et majorées X et Y de $\mathbb{R}$, on pose $X + Y = \left\{x + y,\ x \in X,\ y \in Y\right\}$.

a. Prouver l'existence d'une suite d'éléments de X convergeant vers $\sup X$.

b. Prouver que $X + Y$ est majorée et que $\sup(X+Y) = \sup X + \sup Y$.

c. On suppose $a = \sup X \in X$. Prouver (par un exemple) qu'il est possible qu'il existe $r > 0$ tel que le seul élément de X qui soit dans $]a - r, a + r[$ soit a (on parle alors de point *isolé*).

d. On suppose que $a = \sup X \notin X$. Prouver que pour tout $r > 0$, il y a une infinité d'éléments de X dans l'intervalle $]a - r, a[$ (on dit alors que a est un point *d'accumulation* de X).

4.* Soit $u = (u_n)$ une suite de réels. On suppose que u est non bornée, par exemple non majorée.

a. Peut-on affirmer que u tend vers $+\infty$?

b. Prouver, pour tout entier p, l'existence d'un entier N et d'un entier $N' > N$ tels que $u_n \geq p$ et $u_{N'} \geq p + 1$.

c. Prouver qu'il existe une suite extraite de la suite (u_n) qui tend vers $+\infty$.

---

5. Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $u_n^{\ 3} + u_n \underset{n}{\to} 0$.

a. Prouver que la suite (u_n) est majorée puis que (u_n) tend vers 0.

c. Que peut-on dire d'une suite (v_n) telle que $v_n^{\ 3} - v_n \underset{n}{\to} 0$?

---

6. Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \underset{n}{\to} +\infty$.

a. Prouver que si (u_n) est une suite de réels convergeant vers ℓ, alors $\dfrac{a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n}{a_1 + \ldots + a_n} \to \ell$.

b. Application : équivalents à l'infini de $1! + 2! + \ldots + n!$ et de $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

---

7. **a.** On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) telles que (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \sim v_n$. Prouver que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

b. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \ln(1+\frac{1}{n}) - \sin\frac{1}{n}$.

8. Étudier les suites définies par :

a. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \dfrac{5/8}{1+u_n^{\,2}}$ (on majorera une dérivée) .

b. $u_0, u_1 > 0$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ (on réfléchira).

c. $u_n = \sum_{p=1}^{n} \sin(\frac{p}{n^2})$ (on donnera au préalable un encadrement fin du sinus au voisinage de 0).

d. $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ (on discutera suivant la valeur de u_0).

9. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$. On définit une suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est monotone, et déterminer sa monotonie en fonction du signe de x_0.

b. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

c. Déterminer toutes les fonctions continues h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(\arctan x)$.

d. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$. Déterminer la limite de la suite (v_n), et en déduire un équivalent de u_n.

10. On définit une suite (u_n) par la donnée de u_0 dans $\mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{3-u_n}{u_n+1}$.

a. On suppose que u_0 est tel que la suite soit entièrement définie. Quelles sont ses limites possibles ?

Prouver que si $u_0 \neq 1$, alors $u_n \neq 1\ \forall n$. On pose alors $v_n = \dfrac{u_n+3}{u_n-1}$.

Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Achever alors l'étude de la suite (u_n).

b. Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle entièrement définie ?

11.* On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{10}{1+u_n^{\,2}}$. Prouver que les suite (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes, et que l'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} \leq 1$ et $u_{2n+1} \geq 5$. Trouver alors les limites des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

12. On fixe un réel strictement positif a, et on définit par récurrence une suite (u_n) en choisissant $u_0 \geq \sqrt{a}$ (ce qui est facile grâce à une première évaluation grossière de $\sqrt{a}$), et en posant :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}}\right).$$

a. Donner une relation simple liant $u_n - \sqrt{a}$ et $u_{n-1} - \sqrt{a}$.

b. Prouver que pour tout entier n, on a $u_n \geq \sqrt{a}$, puis que : $\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leq \dfrac{\left|u_{n-1} - \sqrt{a}\right|^2}{2\sqrt{a}}$.

c. En déduire, pour tout entier n, la majoration : $\left|u_n - \sqrt{a}\right| \leq 2\sqrt{a}\left|\dfrac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right|^{2^n}$

e. On choisit $a = 2$ et $u_0 = 1{,}5$. Prouver que u_{10} donne $\sqrt{2}$ avec plus de 1000 décimales exactes. Pas mal, hein ?