SÉRIES ENTIÈRES (1)

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a. $\sum \ln n\, z^n$ **b.** $\sum n^{(-1)^n} z^n$ **c.** $\sum \binom{3n}{n} z^n$ **d.** $\sum n!\, z^{n!}$ **e.** $\sum \cos n\, z^n$

f. $\sum (\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}) z^n$ **g.** $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$ **h.** $\sum \cos(n\frac{\pi}{17}) z^{3n+1}$ **i.** $\sum (1+\frac{1}{n})^{n^2} \frac{z^n}{n!}$ **j.** $\sum \frac{\sin n}{n^2} z^n$

---

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants :

a. a_n est le nombre de diviseurs de l'entier non nul n.

b. a_n est la $n^{\text{ème}}$ décimale de e.

c. a_n est le nombre de chiffres de l'écriture en base 7 de $n!$.

---

3. On se donne une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R. Que peut-on dire des rayons de convergence des séries entières suivantes ? :

a. $\sum a_n z^{3n+1}$ **b.** $\sum \frac{a_n}{n^\pi + \ln n + 1} z^n$ **c.** $\sum a_n^2 z^n$ **d.** $\sum a_n \frac{z^n}{n!}$ (en supposant $R \neq 0$).

---

4. **a.** Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière complexe $\sum a_n z^n$.

b. Soit (a_n) une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

c. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) z^n$.

---

5. **a.** Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

b. Développer en série entière, en précisant le rayon de convergence, la fonction :

$$f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x).$$

c. La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?

---

6. Rayon de convergence et somme des séries entières suivantes :

a. $\sum n^2 z^n$ **b.** $\sum \frac{x^{2n}}{2n+1}$ **c.** $\sum \frac{z^{3n}}{(3n)!}$

d. $\sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ **e.** $\sum \sin(n\theta) z^n$ **f.** $\sum \frac{n^3 - 2n^2 + 3n - 2}{n!} z^n$

g. $\sum \frac{x^n}{(2n+1)!}$ **h.** $\sum a_n z^n$ où a_n est le $n^{\text{ème}}$ chiffre de l'écriture décimale de 5/12.

---

7. On recherche les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de $\mathbb{R}$, on ait $f'(x) = f(\lambda x)$.

a. Prouver qu'une telle fonction, si elle existe, est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et déterminer $f^{(n)}$ pour tout entier n.

b. Résoudre le problème pour $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$.

b. On suppose λ dans $]-1,1[$. Prouver, grâce à une formule de Taylor, que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Prouver dans ce cas que l'équation fonctionnelle étudiée possède des solutions.

---

8. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, et de somme $s(z)$. On note $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum S_n z^n$.

---

9. Soit p un entier non nul et (a_n) une suite de complexes non nuls vérifiant $\lim\limits_{n\infty} \left|\dfrac{a_{n+p}}{a_n}\right| = l \neq 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

---

10. **a.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$; on note $S(x)$ sa somme.

b. Développer en série entière la fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et préciser le rayon de convergence.

c. Déterminer $S(x)$.

d. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$, $f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x}$ si $x > 0$, $f(x) = \cos\sqrt{-x}$ si $x < 0$.
Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

11.* Théorème radial d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, telle que la série $\sum a_n$ converge. Prouver que la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ (on écrira $a_n = R_{n-1} - R_n$ avec $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$). Qu'en déduire ?

Application : on se donne deux séries de complexes convergentes. Prouver que si leur série produit de Cauchy converge, sa somme ne peut qu'être égale au produit des sommes.

---

12. On pose $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$. Prouver que pour tout réel $r > 0$, il existe un entier positif q ayant la propriété suivante : pour tout $n \geq q$, toutes les racines complexes de P_n sont de module supérieur à r.

---

13. Développer (si possible !) en série entière autour de 0 les fonctions suivantes :

a. $\ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$ **b.** $\arcsin x$ **c.** $e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ **d.** $\arctan(x+1)$

e. $\dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{1 + x + x^2}$ **f.** $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$ **g.** $\dfrac{e^x}{1-x}$ **h.** $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\cos t)\,dt$