SÉRIES ENTIÈRES (2)

1. **a.** Prouver que l'application $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$, convenablement prolongée en 0, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En déduire que l'application $g : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$, convenablement prolongée en 0, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. On désire maintenant prouver que g est développable en série entière sur $]-1,1[$. Prouver que si g est somme de la série entière $\sum a_n x^n$ sur $]-h,h[$ (h non nul), alors les a_n satisfont aux formules de récurrence :

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n + \dfrac{a_{n-1}}{2!} + \ldots + \dfrac{a_0}{(n+1)!} = 0 \quad \forall n > 0. \end{cases}$$

c. Prouver que le « système infini » (S) possède une unique suite solution (α_n) et que l'on a pour tout n : $|\alpha_n| \leq 1$.

d. Conclure soigneusement.

2. **a.** Développer en série entière $\sqrt{1+x}$ pour x réel élément de $]-1,1[$. On note $\sum a_n x^n$ ce développement.

b. Calculer, pour z complexe de module strictement plus petit que 1, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^2$.

c.*Prouver que la partie réelle de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ n'est jamais nulle. À laquelle des deux racines carrées de $1+z$ cette somme de série est-elle égale ?

3.* On pose, pour tout réel x, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \sin(n^2 x)$.

a. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et déterminer ses dérivées successives.

b. Prouver que la série de Taylor de f en 0 a un rayon de convergence nul (on pourra utiliser une série double).

4. *Inégalités de Cauchy et théorème de Liouville*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et de somme f.

a. Calculer, pour $r \in [0,R[$ et $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-ip\theta} d\theta$.

b. En déduire que si l'on désigne par $M(r)$ un majorant de $|f|$ sur le cercle de centre 0 et de rayon r, alors :

$$|a_p| \leq \frac{M(r)}{r^p}.$$

c. On suppose dans cette question que R est égal à $+\infty$, et que f est une fonction bornée sur $\mathbb{C}$. Prouver que f est constante (c'est ce résultat qu'un historien des sciences, bourré ou incompétent, a nommé *le théorème de Liouville*, alors qu'il est dû à 100% à Cauchy…).

5. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et S la fonction définie sur $]-R, R[$ par $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On fixe un élément c de $]-R, R[$.

a. Représenter, pour h réel assez petit, $f(h) = S(c+h)$ sous forme d'une série.

b. Écrire $S(c+h)$ sous forme d'une série double (on pourra adopter la convention naturelle que le coefficient binomial $\binom{a}{b}$ est nul si $b > a$).

c. Prouver que f est développable en série entière sur un intervalle que l'on précisera.

6.* Théorème de Tauber

Soit (a_n) une suite de réels ou de complexes, telle que la suite (na_n) tende vers zéro. On suppose que $\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ existe et vaut S. Prouver que la série $\sum a_n$ est convergente, de somme S (on pourra évaluer, pour N entier, la différence $\sum_{k=0}^{N} a_k - f(1 - \frac{1}{N})$ où f désigne la somme de la série entière).

---

7. Soit $\sum c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, f sa fonction somme définie sur le disque $D(0, R)$ du plan complexe. Soit a un élément de $D(0, R)$, et r un réel tel que $|a| < r < R$.

a. Pour θ dans $[0, 2\pi]$, représenter $f(re^{i\theta})$ et $\dfrac{1}{1 - \frac{a}{r} e^{-i\theta}}$ sous forme de séries.

En déduire un développement en série de $g(\theta) = \dfrac{f(re^{i\theta})}{1 - \frac{a}{r} e^{-i\theta}}$.

b. Prouver que la convergence de la série obtenue est normale sur $[0, 2\pi]$, et en déduire la formule intégrale de Cauchy :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1 - \frac{a}{r} e^{-i\theta}} \, d\theta .$$

c. Soit réciproquement une fonction continue f sur $D(0, R)$, qui pour tous a et r vérifiant $|a| < r < R$, satisfait à la formule intégrale précédente.

Grâce au développement en série de $\dfrac{1}{1 - \frac{a}{r} e^{-i\theta}}$, puis à une intégration terme à terme bien justifiée, prouver que f est développable en série entière sur $D(0, R)$.

d. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $D(0, R)$, développables en série entière sur ce disque, et convergeant uniformément sur tout disque $D(0, r)$ avec $r < R$, vers une fonction f.

Prouver que f est définie et continue sur $D(0, R)$, et qu'elle vérifie, pour tous a et r vérifiant $|a| < r < R$, la formule intégrale de Cauchy. Conclure.

e. Peut-on, dans le résultat précédent, remplacer les disques de $\mathbb{C}$ par des intervalles de $\mathbb{R}$?
