SÉRIES

1. Étudier les séries de termes généraux suivants :

a. $u_n = \dfrac{\cos\dfrac{1}{n} - \sin\dfrac{1}{n^2}}{\ln^2(1+n^2)}$ **b.** $\dfrac{e^{-1/n}}{\sqrt[n]{n+1}}$ **c.** $\dfrac{\ln(\tan(\frac{1}{n}))}{\sqrt{n^4+n^3}-n^2}$ **d.** $\sqrt{\arctan(2n)} - \sqrt{\arctan n}$

e. $(1-\dfrac{1}{n})^{n^2}$ **f.** $\dfrac{1}{1+x^n}$ $(x \in \mathbb{R})$ **g.** $\dfrac{z^n}{\sqrt{n!}}$ $(z \in \mathbb{C})$ **h.** $\dfrac{1}{n^{\cos\frac{1}{n}}}$

i. $n^{-\frac{1}{\cos\frac{1}{n}}}$ **j.** $\sqrt[3]{\sin\dfrac{1}{n}} - \sqrt[3]{\sin\dfrac{1}{n+1}}$ **k.** $\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ **l.** $\arccos\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$

m. $\dfrac{1}{\ln(n!)}$ **n.** $e^{-(\ln\ln n)^3}$ **o.** $\arcsin(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{n}) - \arcsin(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n})$

p. $\dfrac{1}{n\ln n \ln\ln^2 n}$ **q.** $\dfrac{\sin n}{\sqrt{n^3+n}\ \cos\dfrac{1}{n}}$ **r.** $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ **s.** $\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n^\alpha}$

t. $\dfrac{(-1)^n}{\ln n + \sin(2n\pi/3)}$ **u.** $\sin\left(\dfrac{n^3+1}{n^2+1}\pi\right)$ **v.** $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ **w.** $\sin\pi\sqrt{n^2+1}$

x. $\dfrac{x^{n^2}}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$ **y.** $\dfrac{1}{\ln(n!)}$ **z.** $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ **a'.** $\dfrac{\cos(\ln n)}{\sqrt{n^3-n^2}}$

b'. $\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}}{\ln^2 n}$ **c'.** $(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n}$ **d'** $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ **e'.** $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\arctan\dfrac{1}{k}}{n^\alpha}$

f'. $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$ **g'.** $\dfrac{(3n+3)x^{3n+1}}{(1+x^n)\ln n}$ (x est un réel différent de -1) ;

h'. $\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}$ **i'.** $u_n = \dfrac{\cos\dfrac{1}{n}}{n+i}$ **(attention !)**

---

2. Soit $\sum a_n$ une série *convergente* à termes positifs. Étudier les séries :

$$\sum \frac{a_n}{1+a_n}\ ,\ \sum \frac{a_n}{1-a_n}\ ,\ \sum a_n^2\ ,\ \sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

---

3. Soit $\sum a_n$ une série *divergente* à termes positifs. Étudier les séries :

$$\sum \frac{a_n}{1+a_n}\ ,\ \sum a_n^2\ ,\ \sum \frac{a_n}{1+na_n}$$

4. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Cas $\alpha \leq 0$: en utilisant une minoration simple de u_n, démontrer que la série diverge.

b. Cas $\alpha > 0$: en utilisant la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$, étudier la série.

5. Convergence et, s'il y a lieu, somme des séries suivantes :

$$\sum \frac{4n-3}{n(n^2-4)} \ , \ \sum \frac{[\sqrt{n+1}]-[\sqrt{n}]}{n} \ , \ \sum \frac{n^4+2n-1}{n!} \ , \ \sum \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^\alpha} \ , \ \sum \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)\right].$$

6.* Soit (u_n) une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$ en croissant. Étudier, en minorant par une intégrale, les séries :

$$\sum \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n} \quad \text{puis} \quad \sum \frac{u_{n+1}-u_n}{u_{n+1}}.$$

7. Convergence et somme (s'il y a lieu !) de la série de terme général : $u_n = \ln(n+2) + a\ln(n+1) + b\ln n$.

8. **a.** Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels positifs. On suppose que (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang, et que $u_n \sim v_n$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

b. Étudier la série $\sum \dfrac{(\mathrm{i}-1)\sin\frac{1}{n}}{(\sqrt{n^3+1}-1)\ln n}$, i désignant le complexe de carré égal à -1.

9. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{4^n}{n\binom{2n}{n}}$ Le but de cet exercice est d'étudier cette série de trois façons.

a. Donner une étude directe de la série $\sum u_n$ grâce à un équivalent de u_n.

b. En faisant une comparaison logarithmique (?) de u_n avec le terme général d'une série de Riemann quelconque *a priori*, puis en choisissant l'exposant intelligemment, donner le comportement de $\sum u_n$.

10. **a.** Étudier la *suite* (u_n) avec $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)$.

b.* Même question avec $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$.

11. Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ ait une limite l dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

a. Discuter, suivant la valeur de l, la nature de la série $\sum u_n$.

b*. Montrer que cette règle (dite « de Cauchy ») est plus précise que celle de d'Alembert, en ce sens que si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ a une limite ℓ, alors la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge aussi vers ℓ mais que la réciproque est inexacte.

12.* On définit une suite (x_n) de réels par la donnée de $x_0 > 0$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n + x_n^2$. Prouver que (x_n) tend vers $+\infty$. On pose $u_n = 2^{-n} \ln x_n$. Prouver que $u_{n+1} - u_n = \mathrm{o}(\frac{1}{2^n})$. En déduire que la suite (u_n) converge, et que si l'on note ℓ sa limite, on a $u_n - \ell = \mathrm{o}(\frac{1}{2^n})$. Prouver enfin l'existence d'un réel α tel que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.

---

13. Soit une suite (u_n) de réels strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{a}{n} + \mathrm{o}(\dfrac{1}{n})$. Prouver, par comparaison à une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge pour $a > 1$, et diverge pour $a < 1$ (règle de Raabe-Duhamel).

On suppose ici que $a = 1$, et que le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ possède un développement limité au second ordre. Prouver, en la comparant à une série de la forme $\sum \dfrac{1}{n+\alpha}$ que la série diverge.

---

14. Soit un cordon élastique imaginaire AB, extensible à l'infini. La première seconde, il est supposé faire 1000 mètres de long. Au moment où commence la deuxième seconde, le cordon est instantanément étiré au point d'atteindre une nouvelle longueur totale AB égale à 2000 m, et conservera cette dimension jusqu'à ce que prenne naissance la nouvelle seconde. À cet instant précis, un nouvel étirement l'amène à 3000 m, et ainsi de suite...

Les extrémités A et B du cordon élastique se trouvent ainsi distantes l'une de l'autre de 1000 m pendant toute la première seconde, 2000 m pendant toute la deuxième seconde, n kilomètres pendant toute la $n^{\text{ième}}$ seconde.

Supposons maintenant qu'un tout mignon petit écureuil, circulant sur ce cordon imaginaire, se trouve situé en A au début de la première seconde et se dirige vers B à la vitesse constante d'un mètre par seconde. Pendant toute la première seconde, notre petit rongeur se trouvera (avec une erreur approximative ne dépassant pas un mètre) éloigné d'un kilomètre de l'extrémité B vers laquelle il se dirige. Lors de la deuxième seconde, cette extrémité B étant passée à 2 km de A et l'écureuil ayant en comparaison très peu avancé, celui-ci se trouvera pratiquement à 2 km (en réalité à peu près à 1999 mètres) de B. Lors de la troisième seconde, et pour des raisons semblables, l'extrémité B sera à peu de chose près à 3 km de l'écureuil, puis à peu près à 3596 km au bout d'une heure, etc.

Prouver que notre petit rouquin finira pourtant bel et bien par arriver au but B tant convoité, et donner une évaluation du temps qui lui sera nécessaire pour atteindre la noisette géante que l'on y a déposée en guise de récompense.

---

15. **a.** Prouver, pour tout réel x de $]-1,1[$, la convergence de la série $\sum(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

b. Prouver, en écrivant $\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \displaystyle\int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t$, que la somme de cette série est égale à $\arctan x$. Donner une majoration du reste de cette série.

c. Application : Prouver la formule de Machin, selon laquelle $\dfrac{\pi}{4} = 4\mathrm{arctg}\dfrac{1}{5} - \mathrm{arctg}\dfrac{1}{239}$. À quel ordre doit-on arrêter les sommes partielles pour obtenir une valeur approchée de π avec un million de décimales exactes ?

16. On se donne une suite (ε_n) de réels positifs tendant vers zéro, et on définit une suite (u_n) par la donnée de u_0 et u_1 strictement positifs, et la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + \varepsilon_n u_n$.

a. Prouver que la suite (u_n) croît à partir du rang 1, et que $u_{n+1} \sim u_n$.

b. Grâce à l'étude de la série $\sum \ln(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$, prouver l'équivalence :

la suite (u_n) converge $\Leftrightarrow$ la série $\sum \varepsilon_n$ converge.

17. Étudier la *suite* de terme général $u_n = \dfrac{n^a n!}{a(a+1)\dots(a+n)}$.