RÉDUCTION (2)

1. Étant donné un endomorphisme u d'un espace de dimension finie E, on définit un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ en posant, pour tout v de $\mathcal{L}(E)$, $\varphi(v) = u \circ v$. Prouver que φ est diagonalisable si et seulement si u l'est.

2. L'algèbre des matrices commutant avec une matrice donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut-elle être un corps ?

3. L'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui à une matrice X associe la matrice $X + \mathrm{tr}(X)I_n$ est-il diagonalisable ? Même question avec la transposition.

4. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. On suppose qu'il existe une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E et un vecteur v tels que $f(e_1) = f(e_2) = \ldots = f(e_n) = v$.

a. Donner le rang de f.

b. f est-il diagonalisable ? (discuter suivant le vecteur v).

5. On se donne n complexes $a_1,\ldots,a_n$, et on considère la matrice « circulante » A suivante :

$$A(a_1,a_2,\ldots a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, on pose $C = A(0,1,0,\cdots,0)$.

a. Exprimer $A(a_1,a_2,\ldots a_n)$ en fonction de C et de ses puissances.

b. Soit ω une racine n-ième de l'unité. On pose $X_\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer CX_ω en fonction de X_ω.

c. Prouver que C est diagonalisable, puis qu'il en va de même de $A(a_1,a_2,\ldots a_n)$.

d. Calculer le déterminant de $A(a_1,a_2,\ldots a_n)$.

e*. p désignant un entier plus petit que n, on prend $a_i = 1$ si $i \leq p$, $a_i = 0$ sinon. Calculer le déterminant de la matrice circulante obtenue.

6. **a.** Les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont-elles diagonalisables ?

b. Prouver l'existence d'une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constituée de matrices diagonalisables.

7. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

a. Déterminer le rang de A.

b. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?

8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et B la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ suivante :

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

a. Calculer les puissances de B, puis $P(B)$ où P est un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$ (*on exprimera la matrice en haut à gauche de* $P(B)$ *à l'aide de* P).

En déduire que pour que B soit diagonalisable, il faut que A le soit.

b. On suppose toujours que B est diagonalisable. Que peuvent valoir les valeurs propres de A ?

c. Donner finalement une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

9. Soit f un endomorphisme de E, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose l'existence de deux complexes distincts a et b et de deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$Id_E = p + q \ ; \ f = ap + bq \ ; \ f^2 = a^2 p + b^2 q \ ;$$

a. Calculer $(f - aId_E)\circ(f - bId_E)$, et en déduire que f est diagonalisable.

b. Établir que p et q sont deux projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$.

c. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{a, b\}$.

d. En supposant que ni a ni b n'est nul, prouver que f est bijective et que :

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ f^m = a^m p + b^m q\,.$$

e. Prouver que p est le projecteur sur $\ker(f - aId_E)$ parallèlement à $\ker(f - bId_E)$, et que q est le projecteur sur $\ker(f - bId_E)$ parallèlement à $\ker(f - aId_E)$.

10. Soient u et v deux endomorphismes d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que u et v commutent.

a. Prouver que les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

b. Prouver que si u est diagonalisable, sa restriction à un sous-espace propre de v est diagonalisable.

c. En déduire que si u et v sont tous deux diagonalisables, alors ils sont « co-diagonalisables » (en ce sens qu'il existe une base de vecteurs propres communs à u et à v).

d*. On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Prouver l'existence d'un vecteur propre commun à u et à v, puis que u et v sont co-trigonalisables.

11. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

a. On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Prouver, pour tout entier $k \in [[1, n]]$, l'existence d'un sous-espace de E de dimension k stable par u.

b*. On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Prouver l'existence d'un polynôme P de degré 1 ou 2 tel que $P(u)$ ne soit pas inversible. En déduire que u possède une droite ou un plan stable.