RÉDUCTION (1)

1. Diagonaliser ou, à défaut, trigonaliser, les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&0&4\\3&-4&12\\1&-2&5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}8&-1&-5\\-2&3&1\\4&-1&-1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3&2&-5\\2&6&-10\\1&2&-3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}-2&8&6\\-4&10&6\\4&-8&-4\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

2. Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}(0)&&1\\&\iddots&\\1&&(0)\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&&&1\\1&\ddots&(0)&\\&\ddots&\ddots&\\(0)&&1&0\end{pmatrix}.$$

3. On souhaite prouver que les deux matrices suivantes sont semblables :

$$A=\begin{pmatrix}3&2&-5\\2&6&-10\\1&2&-3\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les éléments propres de A.

b. Calculer $(A-2I_3)^2$.

c. Conclure en choisissant un vecteur $X_3\notin\ker(A-2I_3)$.

4. Prouver que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de l'une des deux formes suivantes :

$$\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{pmatrix}\quad\text{ou}\quad\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}$$

En déduire que deux matrices non scalaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont semblables si et seulement si elles ont même trace et même déterminant.

5. Soit $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&-1\end{pmatrix}$.

a. Déterminer les éléments propres de A.

b. Quelles sont les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix}$? En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{vect}(I_2,A)$.

6. **a.** Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3-2A^2-A+2I_3=0$.

b. Soit A une matrice carrée réelle telle que $A^3=A+I$. Prouver que $\det A>0$.

7. Soit C une matrice compagnon, et λ une valeur propre de C. Déterminer la dimension de l'espace propre $E_\lambda(C)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que C soit diagonalisable.

8.* Prouver que l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que A est diagonalisable de trois manières différentes :

i. en calculant $\det(\lambda I_3 - A)$ et en déterminant les sous-espaces propres ;

ii. en utilisant le rang de A ;

iii. en calculant A^2.

10. Soit A une matrice symétrique.

a. Prouver que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors A est diagonalisable.

b. Le résultat précédent subsiste-t-il si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

c. On suppose que A est réelle. Soit λ une valeur propre (complexe *a priori*) de A et X_0 un vecteur propre associé. En calculant de deux manières différentes ${}^t X_0 A \overline{X_0}$, prouver que $\lambda \in \mathbb{R}$.

d. De même, que peut-on dire des valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle ?

11. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On note $\mathrm{Com}(u)$ l'algèbre (?) des endomorphismes de E qui commutent avec u.

a. Soit v dans $\mathrm{Com}(u)$. Prouver que les espaces propres de u sont stables par v.

b. <u>On suppose dans la suite que u est diagonalisable</u>. Prouver réciproquement que si w stabilise les espaces propres de u, alors w est dans $\mathrm{Com}(u)$. En déduire la dimension de $\mathrm{Com}(u)$.

12. Soit A une matrice carrée de rang 1.

a. Prouver l'existence de deux matrices colonnes X et Y telles que $A = X\,{}^tY$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur X et Y pour que A soit diagonalisable.

13.* Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que si A est diagonalisable, alors A^2 l'est aussi. Prouver que la réciproque est fausse en général, mais vraie si A est inversible. Examiner le cas des matrices réelles.

14. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possédant deux valeurs propres complexes conjuguées $a + \mathrm{i}b$ et $a - \mathrm{i}b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Prouver que A est semblable à la matrice suivante :

$$R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

15. Soient A et B deux matrices carrées réelles. Prouver que AB et BA ont les mêmes valeurs propres (attention au cas particulier). Préciser ensuite ce résultat en prouvant que AB et BA ont le même polynôme caractéristique (on commencera par le cas où A est inversible). AB et BA sont-elles simultanément diagonalisables ?

16. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$, $A^n = I_2$.

a. Quelles sont les valeurs possibles de P_A ?

b. Prouver que $A^{12} = I_2$.

c. Généralisation ?

17. On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et l'on pose, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(M) = \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$. f est-il diagonalisable ?