ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

1. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

a. $\begin{cases} x' = x + y + \sin t \\ y' = -x + 3y \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ y' = 2x + y + 3z \\ z' = 4x + 2y \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} x'' = x + 2y \\ y'' = 2x + y \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x' = (2-t)x + (t-1)y \\ y' = 2(1-t)x + (2t-1)y \end{cases}$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y'\sin^2 x - y\tan x + \tan x = 0$

b. $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$

c. $y'' + y = \sin 2x$

d. $y''' + 3y'' - 4y = x$

f. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}\mathrm{e}^{-x}$

g. $4xy'' - 2y' + 9x^2 y = 0$

i. $y'' - y' - \mathrm{e}^{2x} y = \mathrm{e}^{3x}$ (poser $t = \mathrm{e}^x$)

j. $x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ (poser $y = \dfrac{u}{x^2}$)

k. $y'' + 2y = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

l. $xy'' - 2y' - xy = 0$ (dériver deux fois)

m. $(x^2 + x)y'' - 2xy' + 2y = 0$ (il y a des solutions polynomiales)

3. Intégrer les équations différentielles suivantes, et traiter les problèmes de raccords :

a. $|x|y' + (x-1)y = x^2$ **b.** $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$ **c.** $x(x+1)y' + y = \arctan x$

4. Chercher les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(1-x)$.

5.* Soient f et g deux fonctions numériques de classe $\mathcal{C}^2$ sur un même intervalle J de $\mathbb{R}$, supposées non proportionnelles. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une équation différentielle linéaire homogène du second ordre dont f et g constituent une base de l'espace des solutions.

6. On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(H) : 2xy' - 3y = 0 \quad ; \quad (E) : 2xy' - 3y = \sqrt{x}\,.$$

a. Résoudre (H) sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}^+$.

7.* f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f + f'' \geq 0$. Prouver que pour tout réel x, on a $f(x) + f(x+\pi) \geq 0$ (poser $g = f + f''$ et résoudre formellement cette équation différentielle, c'est-à-dire exprimer f en fonction de g).

8. Soit q une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a. Soient f et g deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle $(E) : y'' + qy = 0$. Prouver que leur wronskien $w = f'g - fg'$ est constant non nul.

En déduire qu'entre deux zéros consécutifs de f, il y a un zéro de g (en supposant que f s'annule plusieurs fois, bien entendu !).

b. On suppose $I = \mathbb{R}$ et q positive. Prouver que toute solution de (E) s'annule sur $\mathbb{R}$ (chercher un argument de convexité).

---

9. Équations d'Euler

On se donne deux réels a et b et on considère l'équation différentielle $x^2y'' + axy' + by = 0$.

a. Sous quelle forme est-il raisonnable de chercher des solutions ? Intégrer alors cette équation.

b. Intégrer l'équation d'Euler sur $\mathbb{R}_+^*$ grâce au changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.

c. Intégrer l'équation différentielle $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$.

---

10. Une inéquation différentielle

Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On envisage une fonction dérivable z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) \le a(t)z(t) + b(t)$. Soit alors y la solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ satisfaisant à $y(0) = z(0)$. Prouver que $\forall t \ge 0,\ z(t) \le y(t)$ (*indication :* envisager la fonction $\mathrm{e}^{-A}(y - z)$ où A est une primitive de a).

---

11. Soit l'équation différentielle $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

a. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur $]-r, r[$ avec $r > 0$.

b. Déterminer la somme des séries entières obtenues.

c. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0,1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

---

12. Une équation différentielle non linéaire

On considère l'équation différentielle non linéaire $y' + y + y^3 = 0$. *On admettra qu'à part la solution nulle, les autres solutions ne s'annulent pas.*

En considérant une fonction auxiliaire intelligente, prouver que ce problème se ramène à la résolution d'une équation linéaire, et en déduire la forme générale des solutions de l'équation initiale.

---

13. Soient f et g deux solutions indépendantes d'une même équation différentielle homogène $y'' + ay' + by = 0$.

a. Déterminer une équation linéaire du premier ordre dont le wronskien $w = fg' - f'g$ est solution.

On étudie désormais sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E) : xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0$.

b. Déterminer « à vue » une solution de cette équation différentielle.

c. Déterminer la valeur du wronskien de deux solutions de (E).

d. En déduire une autre solution de (E) indépendante de celle déjà trouvée.
