POLYNÔMES

1. **a.** Factoriser $P = 3X^4 + 11X^3 + 20X^2 + 7X - 5$ sachant que ce polynôme possède des racines rationnelles.

b. Factoriser $P = X^4 - 3X^3 + 6X^2 - 15X + 5$ (deux racines ont un produit égal à 5).

c. Factoriser $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ (ce polynôme possède une racine triple).

d. Déterminer les racines complexes du polynôme $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ (on pourra poser $y = x + \dfrac{1}{x}$). En déduire la valeur de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

---

2. Quel est le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$?

---

3. Quelles sont les fonctions polynômes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont bijectives ?

---

4. **a.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, et $a \in \mathbb{R}$. Donner sans démonstration la décomposition de P sur la base $(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$.

b. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que a est racine de P de multiplicité r si et seulement si :

$$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(r-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(r)}(a) \neq 0.$$

c. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double de $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

---

5. Soit le polynôme $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$ où a et b sont deux réels et n un entier non nul.

a. Déterminer a et b pour que 1 soit racine d'ordre au moins 2 de P.

b. Dans ce cas, vérifier que le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$ est $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)X^k$.

---

6. **a.** Prouver que pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, le polynôme $P(X) - X$ divise le polynôme $P(P(X)) - X$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

---

7. Déterminer les polynômes complexes P tels que P' divise P (prouver qu'alors, P'' divise P').

---

8. Expliciter un polynôme à coefficients entiers dont $x = \sqrt{7} - 2\sqrt[3]{4}$ est racine.

9*. Trouver tous les polynômes complexes P tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$ (on commencera par prouver que leurs racines ne peuvent qu'être nulles ou de module 1).

---

10. Soient P et Q deux polynômes à coefficients rationnels. Prouver que leur pgcd est toujours le même, qu'ils soient considérés comme polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

Application : Prouver qu'un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ ne peut avoir de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

---

11. Soient deux entiers strictement positifs a et b. On effectue leur division euclidienne : $a = bq + r$ avec $r < b$. En écrivant $X^a - 1 = X^r(X^{bq} - 1) + X^r - 1$, déterminer le pgcd de $X^a - 1$ et de $X^b - 1$.

---

12. On considère l'application (linéaire !) de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ d(P) = P - P' .$$

a. En considérant les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, prouver que d est surjective mais non injective.

b. Déterminer le noyau de d..

c. Expliciter un antécédent par d d'un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$.

d*. Prouver que si $d(P) \geq 0$, alors $P \geq 0$.

---

13. Soit P un polynôme non constant à coefficients entiers.

a. Prouver que pour tout entier n et tout entier k, $P(n)$ divise $P(n + kP(n))$.

b. En déduire qu'il n'existe (hélas !) pas de polynôme non constant P à coefficients entiers tel que $P(n)$ soit un nombre premier pour tout entier n (NB : le polynôme $P = X^2 - X + 41$ possède la particularité de ne donner que des résultats premiers pour $n = 0, \ldots, 40$).

---

14. Soit P un polynôme à coefficients réels dont toutes les racines sont réelles et deux à deux distinctes.

a. Prouver que le polynôme dérivé P' a toutes ses racines réelles et deux à deux distinctes.

b. Prouver que le polynôme $Q = PP'' - P'^2$ est négatif (c'est le numérateur de quoi, ce truc là ?)

c. En déduire que les coefficients de P vérifient les inégalités : $a_{k-1}a_{k+1} \leq {a_k}^2$.

---

15. **a.** Montrer qu'il existe P et Q uniques dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tels que $(1-X)^n P + X^n Q = 1$.

b. Montrer que $Q(X) = P(1-X)$.

c. Montrer l'existence d'un scalaire λ tel que $(1-X)P' - nP = \lambda X^{n-1}$, et en déduire P.

16.* On se donne un réel *algébrique* a, c'est-à-dire un réel qui est racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels. On suppose en outre que a est irrationnel. Soit P un polynôme non nul à coefficients rationnels *de degré minimum* dont a est racine.

a. Prouver que P ne possède pas de racine rationnelle.

b. Prouver que l'on peut toujours supposer que P est à coefficients entiers (cette hypothèse sera faite dans la suite).

c. Prouver que si l'on note $d = \deg(P)$, alors pour tous entiers p et q avec q non nul, on a :

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^d} .$$

d. En déduire (grâce au théorème des accroissements finis) l'existence d'une constante k strictement positive telle que, toujours pour p et q entiers avec q non nul, on ait :

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{k}{q^d} \text{ dès que } \left|a - \frac{p}{q}\right| \leq 1 .$$

On considère le « nombre de Liouville » $L = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$.

e. Prouver que L est irrationnel.

f. On pose $L_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{10^{n!}}$. Donner une majoration de $\left|L - L_p\right|$.

En supposant L algébrique, donner une minoration de $\left|L - L_p\right|$.

g. Prouver que L n'est pas algébrique (on dit que L est *transcendant*).
