XMP 2021-2022

AUTOUR DES THÉORÈMES DE LEBESGUE

1. f désignant une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on pose, pour tout entier n non nul, $I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Étudier l'existence de I_n et calculer la limite de la suite (I_n).

---

2. On pose, quand cela a un sens, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x}$. f est-elle sommable sur $\mathbb{R}_+^*$? Si oui, calculer son intégrale.

---

3. Prouver que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ est Intégrable sur $]0,1[$ et représenter son intégrale comme une somme de série. Même question avec la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

---

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note λ_n la longueur de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0,1]$.

a. Donner une formule intégrale pour λ_n (ça figure quelque part dans votre cours), et vérifier que l'on a :

$$\lambda_n - n\int_0^1 t^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}} + nt^{n-1}} = I_n .$$

b. Déterminer la limite de la suite (I_n). En déduire la convergence de la suite (λ_n), ainsi que la valeur de sa limite.

c. En quoi ce résultat était-il prévisible ?

---

5. Prouver que $\int_0^1 t^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$ (étrange similitude, non ?).

---

6. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de complexes telles que la suite $(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ tende vers 0 pour tout réel x.

a. Prouver que la suite (a_n) tend vers 0, ainsi que la suite $(b_n \sin nx)$ pour tout réel x.

b. On suppose la suite (b_n) bornée. Prouver alors que la suite d'intégrales $\left(\int_0^{\pi} \left|b_n \sin nt\right|^2 \mathrm{d}t\right)$ tend vers 0. En déduire que la suite (b_n) tend vers 0.

c. On ne suppose plus la suite (b_n) bornée. En envisageant $\beta_n = \inf(1,|b_n|)$, prouver que le résultat de la question précédente reste vrai.

d.* Pourquoi le résultat à prouver est-il trivial pour la suite (a_n) mais pas pour la suite (b_n) ?

---

7. Soit $\sum a_n$ une série de complexes supposée absolument convergente. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

a. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle I quelconque.

On pose, pour tout entier n et tout réel positif t : $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$.

b. Justifier que la suite (a_n) est bornée, et que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

c. Prouver que $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

d. Justifier que pour tout entier n, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} \left| f(t) \right| \mathrm{d}t$.

e. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

8. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions *positives* et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, qui converge simplement sur I. On suppose que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur I.

a. On suppose que l'une au moins des fonctions u_n n'est pas intégrable sur I. Prouver que S n'est pas intégrable sur I.

b. On suppose que les fonctions u_n sont toutes intégrables sur I mais que la série $\sum \int_I u_n$ est divergente. Prouver que S n'est pas intégrable sur I.