AUTOUR DES THÉORÈMES DE LEBESGUE

1. f désignant une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on pose, pour tout entier n non nul, $I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Étudier l'existence de I_n et calculer la limite de la suite (I_n).

Existence de I_n : la fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}$ et si l'on désigne par M un majorant de f, on a (au voisinage de $+\infty$) $\left|f_n(t)\right| \leq M\,\mathrm{e}^{-t}$: or il est bien connu que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, d'où l'existence de I_n.

*Limite de la suite (I_n) : **Attention,** certaines inégalités sont inversées entre 0 et 1 !*

À t fixé, $f_n(t) = \mathrm{e}^{-t^n} f(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} f(t) \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ \dfrac{f(t)}{\mathrm{e}} \text{ si } t = 1 \\ 0 \text{ si } t > 1 \end{cases}$. Nous noterons g la limite simple de la suite (f_n) ainsi définie ; g est clairement continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. Reste à vérifier l'hypothèse de domination pour utiliser le théorème de Lebesgue. Or on a clairement :

$$\left|f_n(t)\right| \leq \begin{cases} M \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ M\,\mathrm{e}^{-t} \text{ si } t > 1 \end{cases}.$$

La fonction majorante est continue par morceaux, indépendante de n, et d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}^+$, le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim I_n = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t .$$

---

2. On pose, quand cela a un sens, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2 x}$. f est-elle sommable sur $\mathbb{R}_+^*$? Si oui, calculer son intégrale.

Il va sans dire que, pour $x \leq 0$, la série définissant $f(x)$ diverge (son terme général ne tend pas vers 0), et qu'elle converge pour $x > 0$ (terme général majoré par $1/n^2$ pour n assez grand).

Fixons $a > 0$: pour $x > a$, on a $0 \leq \mathrm{e}^{-n^2 x} \leq \mathrm{e}^{-n^2 a}$, majorant qui est le terme général d'une série convergente indépendante de x. La série de fonctions définissant $f(x)$ converge donc normalement sur $]a,+\infty[$ et les fonctions sommées étant continues, f est continue sur $]a,+\infty[$. Comme c'est vrai pour tout $a > 0$, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Posons $u_n(x) = \mathrm{e}^{-n^2 x}$: chaque fonction u_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\int_0^{+\infty} \left|u_n\right| = \dfrac{1}{n^2}$. La série $\sum \int_0^{+\infty} \left|u_n\right|$ étant convergente, le théorème d'intégration terme à terme s'applique : f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

---

3. Prouver que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ est intégrable sur $]0,1[$ et représenter son intégrale comme une somme de série. Même question avec la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ *: je tiens à vous faire remarquer que prouver la convergence de cette intégrale* ***n'est pas indispensable*** *a priori puisque, si le théorème d'intégration terme à terme s'applique, il affirmera que la fonction dont on veut calculer l'intégrale est sommable... mais, vous le savez, j'ai horreur de me lancer dans un calcul sans avoir justifié au préalable que ce que je veux calculer existe bien !*

Donc : la fonction intégrée est continue sur $]0,1[$ *, elle tend vers* -1 *en 0, il y a donc un faux problème, et elle est équivalente en 1 à* $\ln(1-t) \leq 0$ *dont l'intégrale converge à la borne 1 (intégrale de référence).*

Calcul : pour $t \in]0,1[$, $\displaystyle\frac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$. *Les fonctions sommées sont continues et sommables sur* $]0,1[$ *et leur somme est continue (c'est f). Enfin,* $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{t^{n-1}}{n}\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$ *et cette série converge. Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$.

La deuxième intégrale ne diffère de celle-ci que par des $(-1)^n$ *qui ne changent rien dans les majorations.*

---

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note λ_n la longueur de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0,1]$.

a. Donner une formule intégrale pour λ_n (ça figure quelque part dans votre cours), et vérifier que l'on a :

$$\lambda_n - n\int_0^1 t^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}} + nt^{n-1}} = I_n .$$

b. Déterminer la limite de la suite (I_n). En déduire la convergence de la suite (λ_n), ainsi que la valeur de sa limite.

c. En quoi ce résultat était-il prévisible ?

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1]$, *on est censé savoir que la longueur de son graphe est* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+f'^2(t)}\,\mathrm{d}t$. *On a donc* $\displaystyle\lambda_n = \int_0^1 \sqrt{1+n^2t^{n-2}}\,\mathrm{d}t$. *Un petit coup de quantité conjuguée permet donc d'avoir :*

$$\lambda_n - n\int_0^1 t^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 (\sqrt{1+n^2t^{2n-2}} - nt^{n-1})\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}} + nt^{n-1}} = I_n .$$

Les plus perspicaces d'entre vous auront sans doute remarqué que ce que l'on retranche à λ_n *est égal à 1. On va maintenant prouver que la suite* (I_n) *tend vers 1 ce qui permettra de montrer que la suite* (λ_n) *tend vers 2 : c'était franchement prévisible quand on regarde le graphe de la fonction* $t \mapsto t^n$ *sur* $[0,1]$ *pour n grand, graphe qui ressemble de plus en plus à la réunion de deux segments de longueur 1, l'un horizontal et l'autre vertical.*

Posons, pour $t \in [0,1]$, $\displaystyle u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}} + nt^{n-1}}$ *: il est immédiat qu'à t fixé,*

$$u_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq t < 1 \\ 0 \text{ si } t = 1. \end{cases}$$

La limite simple de la suite (u_n) *est donc continue par morceaux, et comme on a trivialement* $0 \leq u_n(t) \leq 1$ *pour tout t, l'hypothèse de domination est satisfaite ; le théorème de convergence dominée s'applique et dit que la suite* (I_n) *tend vers 1.*

5. Prouver que $\displaystyle\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$ (étrange similitude, non ?).

*Existence de l'intégrale : même remarque que pour l'exercice **3.**, justifier l'existence de l'intégrale n'est pas indispensable a priori. Mais c'est tellement rapide que ça ne vaut pas le coup de s'en priver ! En effet,* $t^{-t}=\mathrm{e}^{-t\ln t}\underset{t\to 0}{\to}1$ *, il y a donc un faux problème en 0.*

Pour $t>0,\ t^{-t}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-t\ln t)^n}{n!}$. *On posera* $u_n(t)=\dfrac{(-t\ln t)^n}{n!}$ *et on démarre… : les* u_n *sont continues sur* $]0,1]$ *, leur série converge simplement sur* $]0,1]$ *vers* $u(t)=t^{-t}$ *qui est continue par morceaux, il reste donc juste à vérifier que la série* $\displaystyle\sum\int_0^1 |u_n|$ *converge.* ***Attention,*** *contrairement aux apparences les fonctions* u_n *sont positives et la valeur absolue ne dispense pas de garder le* $(-1)^n$ *! Grâce à une intégration par parties, on a facilement :*

$$\int_0^1 (-t\ln t)^n\,\mathrm{d}t=\left[\frac{n(-t)^n(\ln t)^{n-1}}{t}\right]_0^1+\int_0^1\frac{n}{n+1}(-t)^{n+1}\frac{(\ln t)^{n-1}}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{n}{n+1}\int_0^1 (-t)^n(\ln t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

Il est assez facile de voir que dans les intégrations par parties successives, les crochets seront nuls, la puissance de $-t$ *dans l'intégrale va rester la même quand la puissance de* $\ln t$ *descend d'un cran à chaque étape. Enfin le facteur multiplicatif comporte en haut la puissance de* $\ln t$ *et en bas le terme* $n+1$*, résultat de la primitivation de* $(-t)^n$*. Tous calculs faits, on trouve donc* $\displaystyle\int_0^1(-t\ln t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$ *et donc* $\displaystyle\int_0^1|u_n|=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ *: comme cette série converge, le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne :*

$$\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-n}\ .$$

---

6. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de complexes telles que la suite $(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ tende vers 0 pour tout réel x.

a. Prouver que la suite (a_n) tend vers 0, ainsi que la suite $(b_n\sin nx)$ pour tout réel x.

On applique l'hypothèse à $x=0$ *et on trouve que la suite* (a_n) *tend vers 0. On en déduit bien sûr que* $(a_n\cos nx)$ *tend vers 0 pour tout x puis, par différence, que* $(b_n\sin nx)$ *tend aussi vers 0 pour tout x.*

b. On suppose la suite (b_n) bornée. Prouver alors que la suite d'intégrales $\left(\displaystyle\int_0^\pi |b_n\sin nt|^2\,\mathrm{d}t\right)$ tend vers 0. En déduire que la suite (b_n) tend vers 0.

Désignons par M un majorant de la suite (b_n)*, et posons* $f_n(t)=|b_n\sin nt|^2$ *: l'hypothèse permet d'affirmer que la suite* (f_n) *converge simplement vers 0 sur* $[0,\pi]$*. Mais* $|f_n(t)|\le M^2$ *et la fonction constante* M^2 *est sommable sur* $[0,\pi]$ *indépendante de n : le théorème de convergence dominée s'applique, la suite* *d'intégrales* $\left(\int_0^{\pi}\left|b_n \sin nt\right|^2 \mathrm{d}t\right)$ *tend vers 0. Or* $\int_0^{\pi}\sin^2 nt\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2nt}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ *. Bref, la suite* $(\frac{\pi}{2}\left|b_n\right|^2)$ *tend vers 0 et donc la suite* (b_n) *aussi.*

c. On ne suppose plus la suite (b_n) bornée. En envisageant $\beta_n = \inf(1,|b_n|)$, prouver que le résultat de la question précédente reste vrai.

Puisque l'on a $\left|\beta_n\right| \le \left|b_n\right|$, *on a a fortiori* $\left|\beta_n \sin nx\right| \le \left|b_n \sin nx\right|$ *pour tout x, et donc la suite* $(\beta_n \sin nx)$ *tend vers 0 pour tout x. Mais la suite* (β_n) *étant bornée, on peut lui appliquer le résultat de la question précédente et en conclure qu'elle tend vers 0. Finalement,* $\beta_n = \inf(1,|b_n|)$ *tend vers 0 donc devient plus petit que 1, et donc* $\beta_n = \left|b_n\right|$ *pour n assez grand, d'où il résulte que la suite* (b_n) *tend vers 0.*

d.* Pourquoi le résultat à prouver est-il trivial pour la suite (a_n) mais pas pour la suite (b_n) ?

C'est beaucoup plus délicat ! Si la suite $(a_n \cos nx)$ *tend vers 0 pour tout x, on choisit* $x = 0$ *et ça roule tout seul… En revanche, si la suite* $(b_n \sin nx)$ *tend vers 0 pour tout x, aucun choix de x ne convient pour aboutir directement à ce que* (b_n) *tende vers 0 (comme ça a été le cas avec les cosinus). En effet, on peut prouver que 0 est **toujours** valeur d'adhérence de la suite* $(\sin nx)$, *quel que soit le choix de x que l'on fasse. Il y a donc toujours des valeurs de n arbitrairement grandes pour lesquelles* $\sin nx$ *est petit, et on ne sait donc pas ce qu'il en est de* b_n *pour de telles valeurs de n.*

---

7. Soit $\sum a_n$ une série de complexes supposée absolument convergente. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty}\left|a_n\right|$.

a. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle I quelconque.

On pose, pour tout entier n et tout réel positif t : $f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}$.

b. Justifier que la suite (a_n) est bornée, et que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

c. Prouver que $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

d. Justifier que pour tout entier n, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.

En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t$.

e. Prouver que $\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

La suite (a_n) *est bornée puisqu'elle tend vers 0 (la série converge absolument).*

$\left|f_n(t)\right| = \left|\frac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\right| \le M\,\mathrm{e}^{-t}\frac{|t|^n}{n!}$ *et* $\sum \frac{|t|^n}{n!}$ *converge (d'Alembert).*

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ *; mais l'exponentielle est continue, et la série entière qui apparaît étant de rayon de convergence infini, sa somme est continue sur* $\mathbb{R}$.

$$\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \Gamma(n+1) = n!$$

La fin est juste une application du théorème d'intégration terme à terme dont toutes les hypothèses sont satisfaites.

---

8. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions *positives* et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, qui converge simplement sur I. On suppose que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur I.

a. On suppose que l'une au moins des fonctions u_n n'est pas intégrable sur I. Prouver que S n'est pas intégrable sur I.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que u_p ne soit pas intégrable. Alors, les fonctions que l'on somme étant positives, on a $S \geq u_p \geq 0$ et la règle de comparaison nous dit que S n'est pas intégrable.

b. On suppose que les fonctions u_n sont toutes intégrables sur I mais que la série $\sum \int_I u_n$ est divergente. Prouver que S n'est pas intégrable sur I.

Si S était intégrable, on aurait (toujours par positivité des u_n) :

$$\int_I S \geq \int_I S_n = \sum_{k=0}^{n} \int_I u_k .$$

La série à termes positifs aurait donc ses sommes partielles majorées, par conséquent elle serait convergente ce qui n'est pas. S n'est donc pas intégrable.

Question subsidiaire : *à quoi sert cet exercice ?*
