INTÉGRATION

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1}{x-\pi}\displaystyle\int_\pi^x \frac{\cos^2 t}{1+\mathrm{i}e^{\sin t}}\,\mathrm{d}t$.

b. Pour f continue par morceaux sur $[0,1]$, calculer $\lim\limits_n \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt}\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$.

2. *Autour des sommes de Riemann.*

a. Déterminer la limite de $u_n = \left[\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n}}$ (sans Stirling !).

b. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{n^2+k^2}$.

c*. On note $\pi(n)$ le nombre de points à coordonnées entières situés dans le disque de centre 0 et de rayon n de $\mathbb{R}^2$. Donner un équivalent de $\pi(n)$ quand n tend vers l'infini.

d. Soit f une fonction numérique continue à valeurs strictement positives sur $[0,1]$. Prouver l'inégalité de Jensen : $\ln\left(\displaystyle\int_0^1 f\right) \geq \int_0^1 \ln f$.

e*. Pour quelles valeurs du complexe z l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left|z-e^{\mathrm{i}t}\right|\mathrm{d}t$ a-t-elle un sens ? Calculer alors cette intégrale en revenant aux sommes de Riemann.

3. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Quelle est l'interprétation géométrique de la somme de Riemann $R_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$? Illustrer par un dessin soigné.

b. Démontrer, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$, que $\lim\limits_{n\infty} R_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

c. Déterminer la limite de la suite (x_n) définie par $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{n}{3n^2+k^2}$.

4. Lemme de Riemann-Lebesgue

a. Calculer, pour f en escalier sur $[a,b]$, la valeur de $\lim\limits_n \displaystyle\int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$.

b. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. En utilisant le fait que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction en escalier g telle que $\forall x\in[a,b],\ \left|f(x)-g(x)\right|\leq\varepsilon$, déterminer $\lim\limits_n \displaystyle\int_a^b f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$.

5. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(a)=0$ et $\forall t\in[a,b],\ 0\leq f'(t)\leq 1$. Comparer $\displaystyle\int_a^b f^3(t)\mathrm{d}t$ et $\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2$ (on introduira les fonctions $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $G(x)=\displaystyle\int_a^x f^3(t)\mathrm{d}t$ et $H=F^2-G$).

6. Soit f une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,2\pi]$. Prouver que $\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t \geq 0$.

7. Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

a. Prouver que $\left|f(1)-f(0)\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f'^2}$.

b. On suppose $f(0)=0$. Prouver que $\int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2$.

8. On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x)=\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

a. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

b. Montrer que la fonction u définie sur $]1,+\infty[$ par $u(x)=\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}$ possède une limite finie en 1.

c. En utilisant cette fonction u, déterminer la limite de H en 1^+.

d. Déterminer les limites de $H(x)$ et de $\frac{H(x)}{x}$ en $+\infty$ et tracer le graphe de H.

9. Première formule de la moyenne et application

a. Soient f et g deux fonctions numériques continues sur $[a,b]$, g étant supposée positive. Prouver, en encadrant f entre ses bornes inférieures et supérieures m et M, que :

$$\exists c \in [a,b] \text{ tel que } \int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.$$

b. Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. Prouver l'existence de c dans $[a,b]$ tel que :

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(c).$$

En déduire, pour g numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, un développement limité à l'ordre 1 de la différence

$$u_n=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) où $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$, puis donner un équivalent de $u_n-\ell$.

10. Soit f une fonction continue sur un voisinage de 0 à valeurs dans $\mathbb{C}$. Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to 0+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

b. $\lim\limits_{x\to 0+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ (on pourra commencer par le cas où $f(0)=0$, et epsilonner soigneusement).

11. Donner un équivalent, quand x tend vers $+\infty$, de $\int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$.