INTÉGRALES IMPROPRES

1. Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{t}}{\ln(1+\tan t)}\,\mathrm{d}t$ **c.** $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\sin\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ **d.** $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

e. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\ln t\,\mathrm{d}t$ **f.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left|t^\alpha-1\right|^\beta}$ **g.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ **h.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\,,\ P\in\mathbb{R}[X]$

i. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{t^2}}{\operatorname{Ln}(1+\sqrt{t})}\,\mathrm{d}t$ **j.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t^\beta)}$ **k.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t^2\,\mathrm{d}t$ **l.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$

---

2. *Les deux questions sont indépendantes.*

a. La fonction $t\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?

b. Soit a un réel strictement positif. La fonction $t\mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{1+t^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

---

3. Existence et calcul des intégrales suivantes : (pour la **a.**, on la fera à la main, puis en posant $u=1/t$ (ruse de Sioux !)).

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$ **b.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t$ **c.** $\displaystyle\int_0^{2} \arctan\frac{t-2}{t}\,\mathrm{d}t$ **d.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\arctan(t+1)-\arctan t)\mathrm{d}t$ **e.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

---

4. **a.** Prouver l'existence de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ (a et b étant deux réels strictement positifs).

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ (on pourra encadrer cette intégrale).

c. Calculer I en exprimant l'intégrale de x à $+\infty$ à l'aide d'intégrales de $\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$.

---

5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose f et f' intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Prouver que f tend vers 0 en $+\infty$. Prouver que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

---

6. Pour a réel strictement positif, on pose $f_a(t)=\dfrac{\cos t}{t^a}$. Prouver que f_a est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $a>1$. Prouver cependant que l'intégrale de f_a est toujours convergente sur $[1,+\infty[$.

---

7. **a.** Soit f une fonction continue sur $[1,+\infty[$. Prouver que si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

b. Prouver que si f est intégrable sur $[1,+\infty[$, alors $t\mapsto f(t^\alpha)$ l'est aussi pour $\alpha>1$. Que dire si $\alpha<1$?

8.* Soit f une fonction continue et 1-périodique de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$. Prouver, pour tout réel strictement positif λ, l'existence de l'intégrale $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de F en $+\infty$, puis en 0^+ (pour cette dernière limite, il pourra être pertinent d'écrire $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$).

9. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{L}^n(I)$ l'ensemble des fonctions f, continues par morceaux de I dans $\mathbb{C}$, telles que f^n est intégrable sur I.

a. On suppose que $I = [a,b[$ avec b fini. Prouver que $\mathcal{L}^n(I)$ est inclus dans $\mathcal{L}^1(I)$ et que, plus généralement, $\mathcal{L}^p(I)$ est inclus dans $\mathcal{L}^q(I)$ dès que $p > q$.

b. On suppose que $I = [a,+\infty[$. Prouver que si $n > 1$, on n'a aucune inclusion entre $\mathcal{L}^n(I)$ et $\mathcal{L}^1(I)$.

10. On veut prouver que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ (intégrale nommée « intégrale de Dirichlet »).

a. Calculer $C(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos nt$, et en déduire la valeur de $u_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$.

b. Montrer que $v_n = \int_0^{\pi} (\frac{1}{t} - \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}})\sin(n+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, et conclure.

11. Représentation intégrale de la constante d'Euler

a. On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $v_n = \int_0^n \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$. Prouver que v_n existe et que la suite (v_n) est convergente. Prouver l'égalité : $v_n - \ln n = -\mathrm{e}^{-n}\ln n + \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{t}\mathrm{d}t$.

b. Prouver que pour n dans $\mathbb{N}^*$, on a : $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\mathrm{d}t = \int_0^n \frac{1-(1-t/n)^n}{t}\mathrm{d}t$.

c. En déduire que $v_n + (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n) = -\mathrm{e}^{-n}\ln n + R_n$ avec $R_n = \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t} - (1-t/n)^n}{t}\mathrm{d}t$.

d. Prouver que pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$. En déduire que R_n est positif.

e. Prouver que pour tout x de $[0,1/2]$, on a $\ln(1-x) \geq -x - x^2$ et en déduire, pour x dans $[0,n/2]$ les inégalités :

$$\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-x^2/n} \leq (1-\frac{x}{n})^n \quad \text{puis} \quad \mathrm{e}^{-x} - (1-\frac{x}{n})^n \leq \frac{x^2}{n}\mathrm{e}^{-x}.$$

f. Prouver que la suite (R_n) tend vers 0, et en déduire que $\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$.

12.* Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} (\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t)\mathrm{d}x$ (intégrer par parties tant que nécessaire).