GROUPES

1. **a.** Définit-on sur $\mathbb{R}$ une loi de groupe en posant $x \circ y = x + y - xy$? Comment régler le problème ? Calculer, pour tout réel x, $x^{(n)} = \underbrace{x \circ \ldots \circ x}_{n \text{ fois}}$.

b. Prouver que l'on définit une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ en posant $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

---

2. On donne les trois groupes à 6 éléments suivants : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$. Dresser les tables de ces trois groupes. En déduire que deux d'entre eux sont isomorphes et que le troisième ne l'est pas.

---

3. Soit G un groupe noté multiplicativement, de neutre e.

a. Soit x un élément de G. Prouver que si y est un élément de G vérifiant $xy = e$, alors y est l'inverse de x.

b. Soit H une partie de G que l'on suppose *finie* et stable pour le produit, et soit x un élément de H. Prouver qu'il existe deux entiers distincts p et q tels que $x^p = x^q$. En déduire que le neutre e de G est dans H, et que l'inverse de x est dans H. Qu'en conclure ?

---

4. On considère deux sous-groupes H et K d'un même groupe G, et l'on pose : $HK = \left\{ h \times k,\ h \in H,\ k \in K \right\}$. Prouver que HK est un sous-groupe si et seulement si $HK = KH$.

---

5. **a.** Donner les ordres de 4, 5 et 6 dans le groupe additif de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Plus généralement, donner une condition nécessaire et suffisante pour que a engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b. Donner l'ordre de 10 dans le groupe multiplicatif de $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$. En déduire l'existence et la valeur d'un multiple de 29 qui, en base 10, ne s'écrit qu'avec des 1. Avec combien de chiffres 1 s'écrit-il ? Généraliser.

---

6. Soient deux groupes G et H, et f un morphisme de G dans H.

a. Prouver que si a est un élément d'ordre fini de G, alors $f(a)$ est d'ordre fini, diviseur de celui de a.

b. Trouver les morphismes de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ vers $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$.

---

7. Soit $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 5 & 8 & 12 & 16 & 9 & 10 & 6 & 15 & 4 & 7 & 14 & 3 & 1 & 2 & 11 & 13 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{16}$. Décomposer s en cycles, en transpositions, donner sa signature, son ordre.

---

8. Expliciter un élément de $\mathcal{S}_{10}$ d'ordre maximal.

Frédéric Dupré, classe de MP du lycée Camille Vernet, Valence.

9.* **a.** Soit G un groupe fini de cardinal pair. Prouver que l'ensemble des x tels que $x^2 \neq e$ est de cardinal pair. En déduire qu'il existe dans G au moins un élément d'ordre 2.

b. Soit G un groupe fini de cardinal impair. Prouver que $\forall x \in G, \ \exists! y \in G \,/\, x = y^2$.

---

10. Soit G un groupe multiplicatif fini, et a et b deux éléments de G. On note $\omega(x)$ l'ordre d'un élément x de G. Montrer que $\omega(a) = \omega(b) = \omega(ab) = 2 \Rightarrow ab = ba$, que $\omega(ab) = \omega(ba)$, et que si a et b commutent et si $\omega(a)$ et $\omega(b)$ sont premiers entre eux, alors $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$.

---

11. **a.** Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

b. U_n désignant le groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, déterminer $U_p \cap U_q$.

---

12. Soit G un groupe commutatif fini de neutre e et d'ordre $n = ab$ avec a et b premiers entre eux.

On pose $A = \left\{x \in G \,/\, x^a = e\right\}$ et $B = \left\{x \in G \,/\, x^b = e\right\}$.

a. Prouver que A et B sont des sous-groupes de G.

b. Prouver que $A \cap B = \{e\}$ et que $G = AB$.

13.* Soit f un morphisme du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$, supposé non constant.

a. Quelles sont les valeurs possible de $f(\tau)$ quand τ est une transposition ?

b. En déduire que f prend ses valeurs dans $\{-1,1\}$, et prouver l'existence d'une transposition τ_0 telle que $f(\tau_0) = -1$.

c. Calculer le produit de transpositions suivant : $(1\,i)(1\,j)(1\,i)$.

c. Prouver que $f(\tau) = -1$ pour *toute* transposition, et conclure.

---

14. Soit G un groupe fini de cardinal n, et $\left\{e_1, \ldots, e_p\right\}$ un système de générateurs de G de cardinal minimum.

a. Prouver que les éléments de G que sont les $e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \ldots e_p^{\alpha_p}$ avec $\alpha_i = 0$ ou 1 sont deux à deux distincts.

b. En déduire que G possède un système de générateurs possédant moins de $\ln_2 n$ éléments.

15*. <u>Étude des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ (résultats qu'il peut être utile de connaître, surtout pour les 5/2)</u>

On note G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. Le but de ce qui suit est de prouver que G est soit monogène (c'est-à-dire de la forme $a\mathbb{Z}$), soit dense dans $\mathbb{R}$.

Posons $a = \inf\left\{g \in G, g > 0\right\}$. Pourquoi a existe-t-il ?

a. On suppose que a n'est pas nul. Prouver que si a n'était pas dans G, il existerait plusieurs éléments de G entre a et $2a$, puis que cela conduit à une contradiction. Prouver alors que G se réduit à $a\mathbb{Z}$.

b. On suppose que a est nul. Prouver que G est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout réel α et pour tout $r > 0$, il existe un élément de G dans l'intervalle $]\alpha - r, \alpha + r[$.

c. *Application* : on admet que π est irrationnel. Prouver que l'ensemble $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que l'ensemble des $\cos n$, quand n décrit $\mathbb{N}$, est dense dans $[-1,1]$.
