SÉRIE GÉNÉRATRICE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE ENTIÈRE

1. On considère une expérience aléatoire ayant une probabilité p de réussite. On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès, et l'on note T_m la variable aléatoire comptant le nombre d'essais nécessaires à ces m succès.

a. Reconnaître la loi de T_1.

b. Donner plus généralement la loi de T_m pour $m \in \mathbb{N}^*$.

c. Rappeler le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-t)^m}$.

d. Déterminer la fonction génératrice de T_m et en déduire son espérance.

---

2. **a.** Prouver l'existence d'une variable aléatoire entière X dont la fonction génératrice est $g(t) = \dfrac{t}{1-t^2}$.

b. Déterminer la loi de X et l'espérance de X.

c. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Y = \dfrac{X+1}{2}$.

3.* On lance deux dés cubiques indépendants et l'on note X la variable aléatoire donnant leur somme. Prouver, grâce aux fonctions génératrices, qu'il est impossible de truquer ces dés de telle sorte X suive une loi uniforme sur $[[2,12]]$.

---

4. Un pion se déplace sur des cases numérotées par les entiers naturels successifs. Il se trouve initialement sur la case 0 et, à chaque instant, il se déplace d'un nombre strictement positif de cases. On note Y_k la variable aléatoire donnant le nombre de cases parcourues à la k-ième étape, et l'on suppose que les Y_k sont indépendantes et suivent toutes la même loi. On note enfin $a_i = P(Y_1 = i)$, et f la fonction génératrice commune aux variables Y_k.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, qui donne la position du pion à l'instant n. Soit N un entier positif, E_N l'évènement « le pion passe par la case N », et u_N la probabilité de E_N.

a. Décrire l'évènement E_N à l'aide des variables aléatoires S_n.

b. Calculer $P(E_N \cap \{Y_1 = j\})$ pour $j \in [[1,N]]$.

c. En déduire que $u_N = \sum_{j=1}^{N} u_{N-j} a_j$.

d. Justifier l'existence, pour $t \in [0,1]$, de $u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$ et montrer que $u(t) = \dfrac{1}{1-f(t)}$.

e. Calculer u dans le cas où $Y_1 - 1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et en déduire les u_k.

f. On suppose que Y_1 ne prend qu'un nombre fini de valeurs, que ces valeurs sont prises avec une probabilité non nulle, et qu'elles sont deux à deux premières entre elles. Montrer que la suite (u_k) tend vers $1/E(Y_1)$.

---

5. Soient X et N deux variables aléatoires entières sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes possédant toutes la même loi que X.

Pour $\omega\in\Omega$, on pose $S(\omega)=\sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$.

a. On note G_X, G_N et G_S les séries génératrices de X, N et S. Prouver que pour tout t de $[0,1]$, on a :

$$G_S(t)=G_N\circ G_X(t).$$

b. En déduire l'espérance de S dans le cas où N et X possèdent une espérance.

---

6. Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et T des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *en probabilité* vers T si :

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \lim_{n\to+\infty} P(|T_n-T|\geq\varepsilon)=0.$$

On admettra qu'alors, la limite T est presque sûrement unique en ce sens que si la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers T et vers T', alors T et T' sont presque sûrement égales.

De la même façon, on dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *en moyenne* vers T si pour tout entier n, la variable aléatoire possède une espérance, et si :

$$\lim_{n\to+\infty} E(|T_n-T|)=0.$$

Enfin, on dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *complètement* vers T si :

Pour tout $\varepsilon>0$, la série $\sum P(|T_n-T|\geq\varepsilon)$ est convergente.

a. Prouver que la convergence en moyenne entraîne la convergence en probabilité.

b. Prouver que la convergence complète entraine la convergence en probabilité.

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes sur un même espace probabilisé suivant toutes une loi de Poisson de paramètre $\lambda>1$. On pose $Y_n=\prod_{k=1}^{n} X_k$.

c. Calculer $P(Y_n\neq 0)$, comparer pour $\varepsilon>0$ les évènements $(Y_n>\varepsilon)$ et $(Y_n\neq 0)$, et en déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers 0.

Montrer que si (Y_n) convergeait en moyenne vers Y, on aurait $P(Y=0)=1$.

Conclure (on utilisera l'inégalité $E(|Y_n-Y|)\geq E(Y_n)-E(Y)$, après l'avoir justifiée *of course* !).

On considère maintenant une suite (Z_n) de variable aléatoires définies sur un même espace probabilisé, chaque Z_n suivant une loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{n}$.

d. Déterminer $P(Z_n\geq 1)$.

Montrer que pour $\varepsilon>0$, on dispose des inégalités $0\leq P(Z_n\geq\varepsilon)\leq 1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}$.

Prouver que la suite (Z_n) converge en probabilités vers la variable aléatoire nulle, mais qu'elle ne converge pas complètement vers 0.
