INTÉGRALES À PARAMÈTRE

1. Calculer, pour $x > 0$, $I(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \dfrac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ (on calculera $I'(x)$).

---

2. On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t} \mathrm{d}t$.

a. Prouver que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

c. Donner un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

---

3. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2 x}}{1+t^2} \mathrm{d}t$ et $a = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$.

a. Étudier le domaine de définition de f, sa continuité et sa dérivabilité.

b. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y' - y = -\dfrac{a}{\sqrt{x}}$.

c. Montrer que pour tout réel positif x, $f(x) = a\mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$, et retrouver la valeur de a.

---

4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle contenant 0, vérifiant $f(0) = 0$.

On pose, pour $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, et $g(0) = ???$. On veut prouver que g est à son tour de classe $\mathcal{C}^\infty$.

a. Avec quelle hypothèse supplémentaire sur f cet exercice est-il facile ?

b. Dans le cas général, donner une formule intégrale représentant $f(x)$, puis une formule intégrale donnant $g(x)$ sans division. Conclure.

---

5. On pose, pour x réel, $g(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(tx)}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

a. Prouver que g est définie, continue sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est paire. On limite dans la suite l'étude de g à $\mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $\varepsilon > 0$. Prouver l'existence d'un réel positif A tel que $\int_A^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \leq \varepsilon$.

En écrivant $|g(x)| \leq \left| \int_0^A \dfrac{\cos(tx)}{1+t^2} \mathrm{d}t \right| + \left| \int_A^{+\infty} \dfrac{\cos(tx)}{1+t^2} \mathrm{d}t \right|$, prouver l'existence d'un réel positif B tel que $x \geq B \Rightarrow |g(x)| \leq 2\varepsilon$. Conclure.

c. Prouver que pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos t}{x^2+t^2}\mathrm{d}t$. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Après avoir vérifié que $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{t^2+x^2}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{t^2+x^2}\right)$, donner une équation différentielle du second ordre vérifiée par g.

e. Calculer $g(x)$ pour tout réel x.

6.* <u>James Stirling is back !</u>

a. Par le changement de variable $y = x + t\sqrt{x}$ dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}y^x\mathrm{d}y$, montrer que pour x réel strictement positif, $\Gamma(x+1)$ s'écrit $\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \sqrt{x}\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\mathrm{d}t$ où la fonction f est nulle pour $t \le -\sqrt{x}$ et est à préciser sinon.

b. Déterminer, à t fixé, la limite de $f(x,t)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Étudier la fonction $u \mapsto \frac{\ln(1+u)-u}{u^2}$.

c. Si $x \ge 1$, prouver que pour tout t positif, on a $0 < f(x,t) \le (1+t)\mathrm{e}^{-t}$.

d. Montrer que pour tout t de $\left]-\sqrt{x},0\right]$, on a $0 < f(x,t) \le \mathrm{e}^{-t^2/2}$.

e. En déduire la formule de Stirling :

$$\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\approx} \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \sqrt{2\pi x}.$$
