INTÉGRALES À PARAMÈTRE

1. Calculer, pour $x>0$, $I(x)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (on calculera $I'(x)$).

On posera, pour $(t,x)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$, $f(t,x)=\mathrm{e}^{-xt}\,\frac{\sin t}{t}$.

La fonction f est continue (par morceaux) selon t, continue selon x, et la majoration $\left|f(t,x)\right|\le \mathrm{e}^{-xt}$ *assure l'existence de* $I(x)$ *pour tout* $x>0$ *(en partant du principe que l'on sait que* $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$ *converge, ce qui peut quasiment être considéré comme une évidence).*

Bien évidemment, f possède une dérivée partielle selon x en tout point de $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ *et* $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)=-\mathrm{e}^{-xt}\sin t$ *: cette fonction est continue par morceaux selon t, continue selon x, reste à la dominer. Pour cela, on se place comme souvent sur* $]a,+\infty[$ *(avec* $a>0$ *). Pour* $x>a$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\le \mathrm{e}^{-ta}$ *qui est une fonction sommable indépendante de x. Cela nous permet d'affirmer que I est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]a,+\infty[$ *et peut y être dérivée sous le signe intégrale. Comme c'est vrai pour tout* $a>0$ *, c'est vrai sur* $\mathbb{R}_+^*$ *. On calcule alors facilement* $I'(x)$ *en intégrant deux fois par parties (en précisant bien que toutes ces intégrations par parties sont légitimées par le fait que chaque crochet – ou chaque nouvelle intégrale – a bien un sens) :*

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ I'(x)&=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\sin t\,\mathrm{d}t\\ &=\Big[\mathrm{e}^{-tx}\cos t\Big]_0^{+\infty}+x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\cos t\,\mathrm{d}t\\ &=-1+\Big[x\,\mathrm{e}^{-tx}\sin t\Big]_0^{+\infty}+x^2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\sin t\,\mathrm{d}t\\ &=-1-x^2I'(x)\end{aligned}$$

On en déduit donc que $I'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$ *et donc que* $\forall x>0,\ I(x)=c-\arctan x$ *où c est une constante. Reste à déterminer cette constante d'intégration, ce qui peut se faire grâce à la limite de* $I(x)$ *en* $+\infty$ *:* $\left|I(x)\right|\le\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ *. Finalement :* $\forall x>0,\ I(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x$ *.*

---

2. On considère la fonction $F:x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

a. Prouver que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Prouver que $x\mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

c. Donner un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

a. *À* $x>0$ *fixé, la fonction* $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *et elle est majorée, pour t assez grand, par la fonction sommable* $t\mapsto\mathrm{e}^{-2t}$. *Cela assure l'existence de* $F(x)$ *pour tout* $x>0$.

Posons $\forall(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}_+^*,\ f(t,x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{t+x}$ *; f est continue (par morceaux) selon t, continue selon x. Reste donc à dominer f. Mais le meilleur majorant de* $f(t,x)$ *valable pour tout* $x>0$ *et indépendant de x est* $\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{t}$ *dont l'intégrale en 0 est divergente. Cela demande donc de se limiter à* $x>a$ $(a>0)$. *Alors, si* $x>a$, $0\leq f(t,x)\leq\dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{a}$ *et la fonction majorante est intégrable sur* $\mathbb{R}^+$ *et indépendante de x. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique et affirme que F est continue sur* $]a,+\infty[$. *Comme c'est vrai pour tout* $a>0$, *F est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.

b. *Pour* $x>0$, $xF(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{x+t}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$ *et là, c'est un peu embêtant : en effet, faire tendre x vers l'infini dans cette expression demande l'emploi d'un théorème qui ne figure pas explicitement au programme, même s'il est la copie conforme du théorème de convergence dominée. C'est d'ailleurs assez étrange qu'un exercice de la banque d'oraux de CCP tombe dans ce travers !*

Imaginons que l'on remplace x (réel) par n (entier) et posons $u_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{n}{n+t}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$ *; alors trouver la limite de la suite* (u_n) *est à peu près immédiat avec le théorème de convergence dominée : en effet, il suffit de poser* $f_n(t)=\dfrac{n}{n+t}\mathrm{e}^{-2t}$ *et l'on dit que la suite* (f_n) *converge simplement sur* $\mathbb{R}^+$ *vers la fonction* $t\mapsto\mathrm{e}^{-2t}$ *et que l'hypothèse de domination est vérifiée (*$0\leq f_n(t)\leq\mathrm{e}^{-2t}$ *qui est sommable indépendant de n). Ainsi,* $\lim u_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$. *Ce qui vient d'être fait avec la variable entière n pourrait parfaitement être adapté à une variable réelle x, mais c'est ce théorème qui ne figure pas au programme. Et donc, pour résoudre cette difficulté, on devrait en théorie discrétiser le problème (comme on le fait dans le cours pour prouver le théorème de continuité), prendre une suite quelconque* (x_n) *tendant vers* $+\infty$, *et prouver que* $x_nF(x_n)$ *tend vers* $\dfrac{1}{2}$. *Mais c'est bien lourd de faire ainsi à chaque fois. Le corrigé officiel de cet exercice dans la banque CCP contourne gentiment le problème en évoquant « l'extension du théorème de convergence dominée ».*

c. *D'après ce qui précède,* $F(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2x}$ *(ça c'était achtement dur !).*

---

3. On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2x}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $a=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

a. Étudier le domaine de définition de *f*, sa continuité et sa dérivabilité.

On posera, pour $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},\ g(t,x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-t^2x}}{1+t^2}$. *La fonction g est continue selon t et selon x. Par ailleurs, l'intégrale définissant* $f(x)$ *n'est impropre qu'à la borne* $+\infty$. *Si* $x<0$, *la fonction intégrée tend vers* *l'infini à l'infini, l'intégrale est divergente. Pour* $x \geq 0,\ \left|g(t,x)\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ *et cette majoration assure la convergence de l'intégrale. Finalement, le domaine de définition de f est* $\mathbb{R}^+$. *On peut remarquer que la majoration précédente se faisant par une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}^+$ <u>*indépendante de x*</u>*, cela nous permet d'affirmer la continuité de f sur* $\mathbb{R}^+$ *grâce au théorème approprié.*

Reste à dériver f : bien évidemment, g possède une dérivée partielle selon x en tout point de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ *et* $\dfrac{\partial g}{\partial x}(t,x) = \dfrac{-t^2}{1+t^2}\mathrm{e}^{-t^2 x}$ *: cette fonction est continue par morceaux selon t, continue selon x, reste à la dominer. Mais l'arrivée du* t^2 *en haut est un peu gênante et c'est pourquoi, une fois encore, on va se restreindre à* $x \in]a,+\infty[\ \ (a>0)$ *: pour* $x>a,\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(t,x)\right| \leq \mathrm{e}^{-t^2 a}$ *et la fonction majorante est intégrable indépendante de x. Cela nous permet d'affirmer que f est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]a,+\infty[$ *et peut y être dérivée sous le signe intégrale. Comme c'est vrai pour tout* $a>0$, *c'est vrai sur* $\mathbb{R}_+^*$ *:*

$$\forall x>0,\ f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{e}^{-t^2 x}\mathrm{d}t\,.$$

b. Montrer que *f* est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'-y = -\dfrac{a}{\sqrt{x}}$.

Alors $f'(x)-f(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 x}\mathrm{d}t \underset{u=t\sqrt{x}}{=} \frac{-1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = -\frac{a}{\sqrt{x}}$.

c. Montrer que pour tout réel positif x, $f(x) = a\mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, et retrouver la valeur de a.

f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre qu'il est facile d'intégrer en multipliant chaque membre par e^{-x} *:* $(f'(x)-f(x))\mathrm{e}^{-x} = -a\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$. *On choisit alors* $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ *comme primitive de* $-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$ *et l'on obtient l'existence d'une constante c telle que* $f(x)\mathrm{e}^{-x} = c + a\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. *Mais f est clairement bornée sur* $\mathbb{R}^+$ $(0 \leq f(x) \leq \dfrac{\pi}{2})$ *et donc, en faisant tendre x vers l'infini dans l'égalité précédente, on obtient* $c=0$. *Or f est continue en 0, reste donc à faire tendre x vers 0 (et non à l'appliquer en 0 puisqu'elle n'est valable que pour* $x>0$*) dans l'égalité* $f(x) = a\mathrm{e}^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ *pour obtenir* $a\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

Mais $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \underset{u=\sqrt{t}}{=} 2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = 2a$ *d'où* $a = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

---

4. Soit *f* une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle contenant 0, vérifiant $f(0)=0$.

On pose, pour $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, et $g(0) = ???$. On veut prouver que g est à son tour de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Il va de soi que l'on pose $g(0) = f'(0)$ *(en reconnaissant en g le taux d'accroissement de f en 0).*

a. Avec quelle hypothèse supplémentaire sur *f* cet exercice est-il facile ?

Si f est développable en série entière (ce qui n'est nullement garanti, bien que f soit de classe $\mathcal{C}^\infty$), la division par x n'est en réalité qu'une simplification par x dans la série entière dont le terme constant est nul. La fonction g est alors elle-aussi développable en série entière, et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

b. Dans le cas général, donner une formule intégrale représentant $f(x)$, puis une formule intégrale donnant $g(x)$ sans division. Conclure.

Puisque $f(0)=0$, on a $\forall x\in I,\ f(x)=\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u$. Effectuons alors, pour $x\neq 0$, le changement de variable $t=\dfrac{u}{x}$. On obtient $f(x)=x\int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t$ et la division par x devient gratuite ! Il en résulte que $g(x)=\int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t$ pour $x\neq 0$, formule qui reste valable pour $x=0$ puisque $g(0)=f'(0)$. Reste à prouver, grâce à cette formule intégrale, que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Évidemment, le seul problème se situant en 0, on peut toujours se placer sur un segment de la forme $[-\alpha,\alpha]$ avec α assez petit. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On posera $h(t,x)=f'(tx)$ pour $(t,x)\in[0,1]\times[-\alpha,\alpha]$. Il est clair que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, la fonction h possède une dérivée selon x à l'ordre k, et que $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(t,x)=t^k f^{(k+1)}(tx)$: cette fonction est continue par morceaux selon t, continue selon x, et peut être majorée (en valeur absolue) par $\alpha^k M_{k+1}$ où M_{k+1} désigne un majorant de la fonction continue $\left|f^{(k+1)}\right|$ sur le segment $[-\alpha,\alpha]$. La fonction constante $\alpha^k M_{k+1}$ étant intégrable sur $[0,1]$ et indépendante de x, on a exactement ce qu'il faut pour affirmer que g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-\alpha,\alpha]$.

---

5. On pose, pour x réel, $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

a. Prouver que g est définie, continue sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est paire. On limite dans la suite l'étude de g à $\mathbb{R}_+^*$.

À x fixé, la fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}^+$ et la majoration $\left|\dfrac{\cos(tx)}{1+t^2}\right|\leq\dfrac{1}{1+t^2}$ assure la convergence de l'intégrale définissant $g(x)$. Posons alors $\forall(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},\ f(t,x)=\dfrac{\cos(tx)}{1+t^2}$; la fonction f est continue par morceaux selon t, continue selon x, et la majoration précédente par une fonction intégrable indépendante de x donne l'hypothèse de domination dont on a besoin pour appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Je vous fais grâce de la parité de g.

b. Soit $\varepsilon>0$. Prouver l'existence d'un réel positif A tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\leq\varepsilon$.

$\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est le reste d'une intégrale convergente, il tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$!

En écrivant $|g(x)|\leq\left|\displaystyle\int_0^A\frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t\right|+\left|\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t\right|$, prouver l'existence d'un réel positif B tel que $x\geq B\Rightarrow|g(x)|\leq 2\varepsilon$. Conclure.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ *est continue sur le segment* $[0,A]$, *on peut donc lui appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue et affirmer que* $\displaystyle\int_0^A \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. *Il existe donc un réel positif* B *tel que* $x \geq B \Rightarrow \left|\displaystyle\int_0^A \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon$. *Alors, pour* $x \geq B$, *on a* $\left|g(x)\right| \leq 2\varepsilon$. *On a exactement prouvé que la fonction* g *tend vers 0 en* $+\infty$.

c. Prouver que pour tout $x > 0$, on a $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\cos t}{x^2+t^2}\mathrm{d}t$. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La question à se poser est la suivante : pourquoi changer la formule donnant $g(x)$ *avant de dériver* g *? Tout simplement parce que, sous la forme initiale, dériver sous le signe intégrale ferait sortir un* t *au numérateur et qu'on ne peut pas se le permettre (*$\dfrac{t}{1+t^2}$ *n'est plus intégrable à l'infini). Rien de tel ne se produit sous la nouvelle forme, à part que… on verra plus loin.*

Évidemment, la nouvelle formule donnant $g(x)$ *résulte du changement de variable en* $u = tx$ *dans la formule initiale. Bon, je ne vais m'offrir que la première dérivation et je vous laisse le soin de voir ce qu'il y a à rajouter pour justifier la seconde.*

Posons $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^*,\ h(t,x) = \dfrac{x\cos t}{x^2+t^2}$. *On a toutes les hypothèses qui vont bien, jusqu'au moment où il faut dominer* $\dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x) = \dfrac{\cos t}{x^2+t^2} - 2x^2\dfrac{\cos t}{(x^2+t^2)^2}$. *En effet, si l'on majore* $\dfrac{1}{x^2+t^2}$ *par* $\dfrac{1}{t^2}$, *on fait apparaître un problème de sommabilité en 0. Le remède pour contrer cela est bien connu (et toujours le même !) : se limiter à* $x > a$ *(avec* $a > 0$*) : alors* $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x)\right| \leq \dfrac{3}{a^2+t^2}$ *(j'ai majoré par 1 la quantité* $\dfrac{x^2}{x^2+t^2}$*) et la fonction majorante est sommable indépendante de x. Cela nous permet d'affirmer que g est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]a,+\infty[$ *et qu'elle peut y être dérivée sous le signe intégrale. Comme c'est vrai pour tout a,… ritournelle habituelle.*

d. Après avoir vérifié que $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{x}{t^2+x^2}\right) = -\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{x}{t^2+x^2}\right)$, donner une équation différentielle du second ordre vérifiée par g.

La vérification est besogneuse mais ne présente pas de réelle difficulté. Inutile de vous dire que cette identité ne résulte pas d'un généreux hasard, mais qu'elle possède une origine mathématique profonde !

$\forall x > 0,\ g''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{t^2+x^2}\right)\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \cos t \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{t^2+x^2}\right)\mathrm{d}t$ *: magique ! cette nouvelle forme intégrale permet une intégration par parties très facile (quoi de plus cool que de primitiver deux fois une dérivée seconde ?). On arrive ainsi, en constatant à chaque étape que les crochets sont nuls, à* $g''(x) = g(x)$.

e. Calculer $g(x)$ pour tout réel x.

Attention, piège !

On a deux choix pour exprimer $g(x)$ *: l'écrire sous la forme* $a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x}$ *ou sous l'autre forme* $a\,\mathrm{ch}\,x + b\,\mathrm{sh}\,x$. *Certains d'entre vous auront peut-être choisi la deuxième forme qui permet d'exploiter la parité de g et, compte-tenu de la valeur de* $g(0)$, *aboutiront à* $g(x) = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{ch}\,x$*… légèrement raté pour une fonction censée tendre vers 0 à l'infini ! Alors, where is the mistake ? Eh bien tout simplement dans le fait que g est solution de*

$y''-y=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, pas sur $\mathbb{R}$, ce qui rend inexploitable à ce niveau-là la parité de g ! Bref, écrivons plutôt, pour $x>0,\ g(x)=a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}$. La limite nulle de g en $+\infty$ donne $a=0$, puis on fait tendre x vers 0 (en lequel g est continue) pour obtenir $b=\dfrac{\pi}{2}$. Tout compte fait, et si l'on veut une formule valable pour tout réel x, il vient :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ \ g(x)=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|x|}.$$