Ce problème étudie les premières propriétés de la fonction de Bessel définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin t)\mathrm{d}t\,.$$

Cette fonction intervient en physique, notamment en mécanique et en optique.
On rappelle la valeur des intégrales de Wallis :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\mathrm{d}t = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}\,.$$

Propriétés élémentaires, dérivabilité de J

1. Prouver que J est paire, calculer $J(0)$, prouver que $|J(x)| \leq 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. Prouver que pour tout x de $[0,\pi/2]$, on a $J(x) > 0$.

3. Prouver que pour tous réels a et k, on a $|\cos(a+k) - \cos a + k\sin a| \leq \frac{k^2}{2}$.

4. On pose, pour x réel, $H(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin t \sin(x\sin t)\mathrm{d}t$.

a. Majorer, pour x et h réels, $|J(x+h) - J(x) - hH(x)|$.

b. En déduire que J est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $J' = H$.

Par une démonstration en tous points analogue, on peut prouver (ce n'est pas demandé) que J est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout entier n et tout réel x, on a :

$$J^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^n t\, \cos(x\sin t + n\frac{\pi}{2})\mathrm{d}t\,.$$

(*Remarque : aviez-vous remarqué que dériver une fonction trigonométrique revient à la déphaser de* $\pi/2$ *?*).

5. Prouver que pour tout réel x non nul, on a $J''(x) + J(x) = -\frac{1}{x}J'(x)$.

Développement en série entière de J

6. Prouver que pour tout réel t et tout entier n, on a $\left|J^{(n)}(t)\right| \leq 1$.

7. En déduire que pour tout réel x : $J(x) = \lim_{n\infty}\left(J(0) + xJ'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}J^{(n)}(0)\right)$.

8. Que valent les dérivées de J en 0 ? Représenter alors, pour tout x réel, $J(x)$ comme somme d'une série.

Zéros de J

On pose, pour x réel positif, $K(x) = J(2\sqrt{x})$. Comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, K est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et un calcul simple prouverait, grâce à l'équation différentielle obtenue à la question **5.**, que K est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle (E) : $xy'' + y' + y = 0$ (on ne demande pas de vérifier ce résultat).

Le but de ce qui suit est de prouver que K (et donc aussi J) s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+^*$, et ce <u>en utilisant le seul fait que K est solution de (E).</u>

On suppose provisoirement qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \geq c$, on ait $K(x) > 0$.

9. Calculer en fonction de K'^2 la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto xK'^2(x) + K^2(x)$.
En déduire l'existence d'une constante M telle que pour tout $x \geq c$, on ait $xK'^2(x) + K^2(x) \leq M$.

10. Montrer que la fonction qui à x associe $xK'(x)$ est décroissante sur $[c, +\infty[$.

11. Soit $x_0 \geq c$. Pour $x \geq x_0$, on pose $D(x) = K(x) - x_0 K'(x_0) \ln x$.
Quel est le signe de $D'(x)$? Peut-on avoir $K'(x_0) < 0$? Qu'en conclure ?

12. Montrer que K admet en $+\infty$ une limite a strictement positive.

13. **a.** Montrer qu'il existe $x_1 \geq c$ tel que pour tout $x \geq x_1$, on ait $K''(x) \leq -\dfrac{a}{2x}$.

b. En déduire que l'hypothèse faite en début de partie est absurde.

14. Montrer que K s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

Limite de J à l'infini

15. On pose, pour tout x strictement positif, $f(x) = \sqrt{x} J(x)$.

a. Prouver que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle de la forme $y'' + q(x)y = 0$ où q est une fonction que l'on explicitera.

b. Calculer à l'économie la dérivée de $f'^2 + qf^2$ et en déduire que f est bornée sur $[1, +\infty[$. Que peut-on en déduire concernant J ?

Répartition des zéros de J, et aspect oscillatoire de J

16. On fixe ici un zéro de J que l'on note z.

a. Prouver qu'il existe une dérivée d'un certain ordre de J qui est non nulle au point z (on prouvera que si tel n'était pas le cas, J serait constante, et l'on justifiera que c'est inexact).

b. En déduire qu'il existe un voisinage de z dans lequel z est le seul zéro de J.

17. En utilisant le fait que $xJ'' + J' = -xJ$, prouver qu'entre deux annulations successives de J, la fonction J' s'annule une fois et une seule. Comment varie J entre deux zéros consécutifs ?