DÉNOMBRABILITÉ, FAMILLES SOMMABLES

1. Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

a. L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

b. L'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$.

c. Un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie ?

d. Une base de $\mathbb{R}$ considéré comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (en admettant l'existence d'une telle base).

---

2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, et D l'ensemble de ses points de discontinuité. En considérant les ensembles $D_n = \{x \in [a,b] \ / \ f(x+0) - f(x-0) \geq 1/n\}$, prouver que D est au plus dénombrable.

Prouver que le résultat demeure en remplaçant $[a,b]$ par $\mathbb{R}$.

---

3. Soit $\sum u_n$ une série convergente de réels positifs, (R_n) la suite de ses restes. Prouver que les séries $\sum R_n$ et $\sum nu_n$ ont même nature et, en cas de convergence, qu'elles ont même somme.

---

4. **a.** Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

b. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{p,q\geq 1}$

---

5. **a.** Soient deux séries de complexes absolument convergentes $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} b_n$.

Prouver que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{pq=n} a_p b_q$.

b. Prouver que pour tout $s > 1$, $\displaystyle\zeta^2(s) = \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s}$ où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de l'entier n.

6.* **a.** Étudier, pour $z \in \mathbb{C}$, la sommabilité de la suite double $(pz^{np})_{n\geq 1,\, p\geq 1}$.

b. En déduire, pour z complexe de module strictement plus petit que 1, l'identité :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{pz^p}{1-z^p} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sigma(k) z^k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2},$$

où $\sigma(k)$ désigne la somme des diviseurs de l'entier k.

---

7. Montrer, pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, l'identité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{1-z^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}}.$$

---

8. On pose, quand c'est possible, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+x^n)$.

a. Donner le domaine de définition D de f.

b. Donner, pour x dans D, une expression de $f(x)$ sous forme d'une autre série.

c. Déterminer la limite de f à la borne gauche de D.

9. Soit x un réel positif.

a. Décomposer $\dfrac{1}{(X+1)(X+2)\dots(X+n)}$ en éléments simples.

b. En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}=\mathrm{e}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(x+k)}$ (on posera