CALCULS D'ESPÉRANCES

Ce petit document vient en complément du cours pour donner la démonstration (assez technique) de deux résultats qui y sont admis, à savoir le théorème de transfert et le calcul de l'espérance du produit de deux variables indépendantes. J'aurais pu y rajouter la preuve du théorème de linéarité de l'espérance mais il me semble que les deux preuves qui suivent sont bien suffisantes pour avoir une petite idée du type de raisonnement que ces démonstrations requièrent.

Théorème (ou formule) de transfert :

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans un ensemble E, et f une application de E dans $\mathbb{R}$. Alors la variable aléatoire réelle $f(X)$ possède une espérance si, et seulement si, la famille de réels $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas on a :

$$\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$

Démonstration :

L'existence de l'espérance de la variable aléatoire $f(X)$ repose sur la sommabilité de la famille de réels positifs $\big(|y|\, P(f(X)=y)\big)_{y\in f(X)(\Omega)}$.

Mais l'évènement $\big(f(X)=y\big)$ peut être vu comme la réunion au plus dénombrable disjointe des évènements $(X=x)_{x\in f^{-1}(y)}$ et donc, par σ-additivité, $P(f(X)=y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} P(X=x)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que la famille $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.

Alors, une sous-famille d'une famille sommable étant encore sommable, on peut affirmer pour $y \in f(X)(\Omega)$ la sommabilité de la famille $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in f^{-1}(y)}$. De plus :

$$\begin{aligned}\sum_{x\in f^{-1}(y)} f(x)P(X=x) &= y \sum_{x\in f^{-1}(y)} P(X=x)\\ &= yP(X\in f^{-1}(y))\\ &= yP\big(f(X)=y\big).\end{aligned}$$

Enfin, Ω étant la réunion disjointe des ensembles $f^{-1}(y)$ quand y parcourt $f(X(\Omega))$, le théorème de sommation par paquets permet d'écrire que :

$$\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x) = \sum_{y\in f(X)(\Omega)} \sum_{x\in f^{-1}(y)} f(x)P(X=x) = \sum_{y\in f(X)(\Omega)} yP\big(f(x)=y\big),$$

cette dernière famille étant sommable. On a donc prouvé que $f(X)$ possède une espérance ainsi que l'égalité :

$$\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que la variable aléatoire $f(X)$ possède une espérance, c'est-à-dire que la famille de réels positifs $\big(|y|\, P(f(X)=y)\big)_{y\in f(X)(\Omega)}$ est sommable. Il s'agit de prouver que la famille $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, donc de prouver la finitude de la somme $\sum_{x \in X(\Omega)} \left|f(x)\right| P(X = x)$. Comme il s'agit d'une famille de réels positifs, le théorème de sommation par paquets s'applique et permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{x \in X(\Omega)} \left|f(x)\right| P(X = x) &= \sum_{y \in f(X)(\Omega)} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \left|f(x)\right| P(X = x) \\ &= \sum_{y \in f(X)(\Omega)} \left|y\right| \sum_{x \in f^{-1}(y)} P(X = x) \\ &= \sum_{y \in f(X)(\Omega)} \left|y\right| P\big(f(X) = y\big) < +\infty,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Théorème (espérance d'un produit de variables indépendantes) :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, supposées *indépendantes.* On suppose que X et Y possèdent toutes deux une espérance. Alors la variable $Z = XY$ possède une espérance et :

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).$$

Démonstration :

Le théorème de transfert appliqué au couple de variables aléatoires (X,Y) et à la fonction $f : (x,y) \mapsto xy$ permet d'affirmer que la variable aléatoire XY possède une espérance si, et seulement si, la famille $\big(xyP((X,Y) = (x,y))\big)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est sommable. Supposant ce point prouvé, on aura :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP((X,Y) = (x,y)) \\ &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP((X = x) \cap (Y = y)) \\ &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x)P(Y = y) \\ &= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)\right)\left(\sum_{y \in Y(\Omega)} yP(\mathrm{Y} = y)\right) \text{ (famille produit)} \\ &= \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y).\end{aligned}$$

Mais le même calcul, effectué dans l'autre sens à partir du produit $E\big(\left|X\right|\big)E\big(\left|Y\right|\big)$, prouve la finitude de la somme $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \left|xy\right| P((X,Y) = (x,y))$ et donc l'existence de l'espérance du produit XY qui est ce que l'on souhaitait prouver.