TD 7. Probabilité

Exercice 1. L'urne U, au contenu évolutif, contient au départ 1 boule blanche et $n-1$ boules noires ($n \geq 2$). On effectue des tirages successifs de la façon suivante :

- si au k-ième tirage on tire la boule blanche, on s'arrête, on a gagné ;
- si au k-ième tirage on tire une boule noire, alors on remet la boule noire dans l'urne, on ajoute une boule noire en plus dans l'urne U et on procède au $(k+1)$-ième tirage.

On note B_k [resp. N_k] les événements « on a effectué $(k-1)$ tirages sans obtenir la boule blanche, et le k-ième tirage apporte la boule blanche [resp. une boule noire] ». Calculer les probabilités des événements (après les avoir « renommés ») :

$$B_k \quad ; \quad N_k \quad ; \quad \bigcup_{h \leq k} B_h \quad ; \quad \overline{B_k \cup N_k} \quad ; \quad \bigcup_{h \geq 1} N_h \quad ; \quad \bigcup_{h \geq 1} B_h \quad ; \quad \bigcap_{h \geq 1} N_h.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est p, avec $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers Face ne soit jamais suivi de Pile ?

Exercice 3. Une urne contient $n-1$ boules blanches et 1 boule noire. On tire les n boules de l'urne de façon successive sans remise. Calculer la probabilité p_k que la boule noire soit tirée au k-ième tirage.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

(1) On tire successivement deux boules dans l'urne. Quelle est la probabilité pour que la deuxième boule tirée ait un numéro supérieur ou égal à celui de la première boule

(a) lorsque le tirage est avec remise. (b) lorsque le tirage est sans remise.

Indication : on pourra introduire pour $1 \leq k \leq n$, l'évènement A_k :« la deuxième boule tirée porte le numéro k » et utiliser la famille d'évènements $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$.

(2) On tire successivement p boules dans l'urne.

(a) Quelle est la probabilité pour que la p-ième boule tirée ait un numéro supérieur ou égal aux numéros des $(p-1)$-premières boules tirées lorsque le tirage est sans remise ? *Indication : on pourra introduire pour $1 \leq k \leq n$, l'évènement A_k :« la p-ième boule tirée porte le numéro k » et utiliser la famille d'évènements $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$.*

(b) Montrer par récurrence sur n que pour tout (n,p) d'entiers tels que $0 < p \leq n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$. En déduire une expression simple de la probabilité cherchée.

Exercice 5. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On retire en une fois de cette urne une poignée aléatoire de p boules ($1 \leq p \leq N$).

(1) Soit $k \in [\![p, N]\!]$. Calculer la probabilité de l'évènement B_k : « le plus grand numéro de la poignée est k ».

(2) En déduire la formule : $\displaystyle\sum_{k=p}^{N} \binom{k-1}{p-1} = \binom{N}{p}$.

Exercice 6. n joueurs (avec $n \geq 2$) vont successivement tenter une expérience où la probabilité d'insuccès est p (avec $0 < p < 1$). Si le premier joueur perd, la partie s'arrête. S'il triomphe, le deuxième joueur tente sa chance. S'il perd, la partie s'arrête. S'il triomphe, le troisième joueur tente sa chance ... Si le n-ième joueur tente sa chance et perd, la partie s'arrête, et s'il triomphe le premier joueur tente sa chance pour la deuxième fois etc ... La partie s'arrête dès qu'un joueur perd.

(1) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Quelle est la probabilité pour que le k-ième joueur perde lors de sa i-ème tentative ?

(2) Quelle est la probabilité pour que le k-ième joueur perde la partie ?

Exercice 7. Deux joueurs A et B s'affrontent à un jeu de dé (supposé parfaitement équilibré). A commence la partie et lance le dé. S'il obtient 1 ou 2, A est déclaré vainqueur et la partie s'arrête. Sinon, B prend la main et jette le dé : s'il obtient 3, 4 ou 5, il a gagné et la partie s'arrête. Sinon, A prend la main et on recommence dans les mêmes conditions ...

(1) Soit n entier naturel non nul. Calculer les probabilités des évènements : A_{2n-1} :« A gagne au $(2n-1)$-ième lancer » et B_{2n} :« B gagne au $2n$-ième lancer ».

(2) Quelles sont les probabilités des évènements G_A :« A gagne », G_B :« B gagne » et H :« la partie ne s'arrête pas ».

Exercice 8. Une urne contient initialement une boule blanche et une noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : si la boule blanche est tirée, le jeu s'arrête, et si une boule noire est tirée, la boule tirée est remise dans l'urne et l'on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, autant de boule noire que l'urne contenait de boules à l'étape précédente. Soit A_n l'évènement « le n-ième tirage amène pour la première fois la boule blanche ».

(1) Montrer que $\displaystyle P(A_n) = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.

(2) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$, en déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(A_n)$.

(3) A-t'on $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = 1$? Interpréter ce résultat.

Exercice 9. Soit A, B, C trois évènements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, avec $P(B) > 0$, $P(C) > 0$ et $B \cap C = \emptyset$. Exprimer $P_{B \cup C}(A)$ à l'aide de $P(B)$, $P(C)$, $P_B(A)$, $P_C(A)$, $P(B \cup C)$.

Exercice 10. Une maladie rare touche un individu sur 100 000. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des personnes malades et pour 0.5% des individus sains. Un individu est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ? Ce test vous paraît-il fiable ? Et si le test est négatif, que doit-on en penser ?

Exercice 11. On considère $n+1$ urnes $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$, ..., $\mathcal{U}_n$. L'urne $\mathcal{U}_k$ contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, puis on tire successivement deux boules de cette urne.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches, si le tirage se fait avec remise ?

(2) Même question si le tirage se fait sans remise.

Exercice 12. Une cellule se déplace entre trois points distincts A, B et C. A chaque étape, elle quitte sa position et gagne indifféremment (c'est à dire avec la même probabilité, $\frac{1}{2}$) l'un des deux autres points. On note a_n, b_n et c_n les probabilités qu'elle se trouve en A, B et C à l'issue de la n-ième étape. On suppose la cellule en A initialement.

(1) Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

(2) Exprimer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

(3) En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 13. On a une urne U qui contient une boule blanche et une boule noire, et une urne V qui contient une boule noire et deux boules blanches. On tire successivement une boule avec remise dans l'une des deux urnes en repectant le protocole suivant : on commence par tirer dans U, si on tire une boule blanche on effectue le tirage suivant dans la même urne, sinon on change d'urne.

(1) Calculer la probabilité de tirer dans l'urne U au n-ième tirage.

(2) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au n-ième tirage.

Exercice 14. Soit deux évènements A et B tels que $P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,4$. Calculer $P(A \cup B)$ dans les cas suivants :
(1) A et B sont incompatibles. (2) La réalisation de B entraîne celle de A. (3) A et B sont indépendants (pour P).

Exercice 15. Soit $p \in]0,1[$ un réel. Une personne effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie (*on considère qu'elle ne s'arrête pas après avoir gagné ou perdu*). Elle a une probabilité p d'obtenir Pile et une probabilité $q = 1-p$ d'obtenir Face.

- la personne gagne la première fois qu'elle obtient deux Pile de plus que de Face, à condition de ne pas avoir perdu avant ;
- la personne perd la première fois qu'elle obtient deux Face de plus que de Pile, à condition de ne pas avoir gagné avant .

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de l'évènement O_n :« en $2n$ coups, la personne n'a ni gagné, ni perdu, et à l'issu du $2n$-ième lancers, elle a obtenu autant de Pile que de Face ».

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente la probabilité que la partie dure strictement plus de $2n$ coups.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité que la personne gagne au $2n$-ième lancer.

(4) Calculer la probabilité que la personne gagne.

Exercice 16. On effectue des tirages successifs sans remise dans une urne U. L'urne U contient une boule blanche, trois boules noires et r boules rouges. Si on a tiré la boule blanche, on a gagné. Si on a tiré une boule noire, on a perdu. Et si on a tiré une boule rouge, on retire une autre boule (la partie se termine donc en moins de $r+4$ coups, car il n'y a pas remise).

(1) Si p_r désigne la probabilité de gagner lorsque l'urne contient r boules rouges, calculer p_0 et p_1.

(2) Démontrer l'égalité : pour $r \in \mathbb{N}^*$, $p_r = \dfrac{1}{r+4} + \dfrac{r}{r+4}p_{r-1}$. En déduire la valeur de p_r en fonction de r.

Exercice 17. Un joueur lance une pièce qui donne « pile » avec la probabilité p, et « face » avec la probabilité $q = 1-p$. Le joueur veut réaliser l'événement suivant : « obtenir 2 fois pile à la suite », et on note p_n la probabilité de l'événement E_n : « le deuxième pile de la première série de deux piles consécutifs a été obtenu lors du n-ième lancer ». On note B_n l'événement « on a obtenu au moins une fois 2 piles à la suite au cours des n premiers lancers ».

(1) (a) Déterminer les probabilité p_1, p_2, p_3, p_4.

(b) Calculer $P(B_i)$ pour $i \in \{1,2,3,4\}$. Démontrer que la suite (B_n) est une suite croissante d'événements.

(2) (a) Démontrer, pour $n \geq 2$, que $P(B_n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} p_k$ et, pour $n \geq 1$, que $p_{n+3} = P(E_{n+3}) = \big(1 - P(B_n)\big)qp^2$.

(b) En déduire que $p_{n+2} - p_{n+3} = qp^2 p_n$ si $n \geq 1$.

(3) (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{U}$ des suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui vérifient la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+3} - u_{n+2} + qp^2 u_n = 0$$

est muni d'une structure d'espace vectoriel.

(b) Démontrer que la suite (r^n) appartient à $\mathcal{U}$ si et seulement si $r^3 - r^2 = p^3 - p^2$ ou $r = 0$. Démontrer que cette équation possède trois racines réelles.

(c) On choisit d'étudier le cas $p = \frac{3}{7}$: démontrer que les racines de cette équation sont $r = \frac{3}{7}$, $\frac{6}{7}$ et $-\frac{2}{7}$. En déduire pour cette valeur de p une base de $\mathcal{U}$.

(d) On donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 9 & 36 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{9}{20} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$. Déterminer p_n en fonction de n.

Solutions

Exercice 1 ★ $B_k = N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$, et par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(B_k) &= P(N_1)P_{N_1}(N_2)\ldots P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-2}}(N_{k-1})P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(B_k) \\ &= \frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n+1}\times\cdots\times\frac{n-1+k-2}{n+k-2}\times\frac{1}{n+k-1} = \boxed{\frac{n-1}{(n+k-2)(n+k-1)}} \end{aligned}$$

Ce qui est important ici, c'est de bien comprendre les probabilités conditionnelles à calculer : $P_{N_1\cap\cdots\cap N_i}(N_{i+1})$ est la probabilité « sachant $N_1 \cap \cdots \cap N_i$ », donc « sachant que l'on a tiré aux i premiers-tirages que des boules noires, et donc **qu'il y a un tirage numéro** $i+1$ », d'avoir une boule noire au tirage numéro $i+1$. Comme on sait $N_1 \cap\cdots\cap N_i$, au moment du tirage $i+1$, l'urne contient $n+i$ boules, dont 1 seule blanche, et donc $P_{N_1\cap\cdots\cap N_i}(N_{i+1}) = \dfrac{n+i-1}{n+i}$.

★ $N_k = N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap N_k$, et par la formule des probabilités composées :

$$P(N_k) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)\ldots P_{N_1\cap\cap N_{k-1}}(N_k) = \frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n+1}\times\cdots\times\frac{n-1+k-2}{n+k-2}\times\frac{n+k-2}{n+k-1} = \boxed{\frac{n-1}{n+k-1}}.$$

★ $\bigcup_{h\le k} B_h$ =« on tire une boule blanche (donc le jeu se termine) au plus tard au k-ième tirage », et comme les B_h sont deux à deux incompatibles (si on tire une boucle blanche, le jeu se termine, donc on ne peut pas tirer une autre boule blanche), on a

$$P\left(\bigcup_{h\le k} B_h\right) = \sum_{h\le k} P(B_h) = \sum_{h\le k}\frac{n-1}{(n+h-2)(n+h-1)}$$

Mais cette expression n'est pas satisfaisante, car la somme ne se calcule pas facilement (en fait si, si on décompose en élément simple, et qu'on reconnaît une somme télescopique ...). Mais, on peut remarquer $\overline{\bigcup_{h\le k} B_h} = N_k$, car le jeu ne se termine pas avant le k-ième tirage si et seulement si aux k premiers tirages, on a eu une boule noire. Donc

$$\boxed{P\left(\bigcup_{h\le k} B_h\right) = 1 - \frac{n-1}{n+k-1}}.$$

★ $B_k \cup N_k$=« on tire une boule blanche ou une boule noire au tirage numéro k »=« il y a un tirage numéro k »=N_{k-1}, et donc $\overline{B_k\cup N_k}$ =« on a tiré la boule blanche au plus tard au $k-1$-ième tirage »= $\bigcup_{h\le k-1} B_h$. Donc $\boxed{P\left(B_k\cup N_k\right) = 1-\frac{n-1}{n+k-2}}$.

★ La suite d'évènements $\left(\bigcup_{1\le h\le k} N_h\right)_{k\ge1}$ est croissante pour l'inclusion, donc $P\left(\bigcup_{1\le h} N_h\right) = \lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcup_{1\le h\le k} N_h\right)$. Or, $\bigcup_{1\le h\le k} N_h = N_1$ pour tout k (car pour tout $h\ge 2$, $N_h\subset N_1$, puisqu'il y a eu un tirage numéro h, et donc le jeu ne s'est pas terminé au tirage numéro 1). Donc $P\left(\bigcup_{1\le h} N_h\right) = P(N_1) = \boxed{\frac{n-1}{n}}$.

Remarque 1. *En fait, on a même* $\bigcup_{1\le h\le k} N_h = N_1$.

★ Les évènements $(B_h)_{h\ge1}$ sont deux à deux incompatibles et forment une famille dénombrable, donc par σ-additivité de P, $P\left(\bigcup_{h\ge1} B_k\right) = \sum_{h=1}^{+\infty} P(B_h) = \sum_{h=1}^{+\infty}\frac{n-1}{(n+h-2)(n+h-1)}$. On décompose alors en éléments simples : $\frac{n-1}{(n+h-2)(n+h-1)} = \frac{n-1}{n+h-2} - \frac{n-1}{n+h-1}$, on a une série télescopique, et donc $P\left(\bigcup_{h\ge1} B_h\right) = 1 - \lim_{k\to+\infty}\frac{n-1}{n+k-1} = \boxed{1}$.

On peut aussi dire que la suite d'évènements $\left(\bigcup_{1\le h\le k} B_h\right)_{k\ge1}$ est croissante pour l'inclusion, donc $P\left(\bigcup_{h\ge1} B_h\right) = \lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcup_{1\le h\le k} B_h\right) = \lim_{k\to+\infty} 1 - \frac{n-1}{n+k-1} = \boxed{1}$.

★ $\bigcap_{1\le h} N_h$ =« on ne tire que des boules noires ». La suite d'évènements $\left(N_h\right)_{k\ge1}$ est décroissante pour l'inclusion, donc $P\left(\bigcap_{1\le h} N_h\right) = \lim_{k\to+\infty} P\left(N_k\right) = \lim_{k\to+\infty}\frac{n-1}{n+k-1} = \boxed{0}$. Une autre possibilité est de remarquer que $\bigcap_{1\le h} N_h = \overline{\bigcup_{k\ge1} B_k}$.

Exercice 2 Notons E l'évènement considéré. Notons F_i l'évènement « on obtient Face au lancer i » et P_i l'évènement « on obtient Pile au lancer i ». On peut se lancer dans une description complète de l'évènement E : $E = \bigcup_{i=1}^{n+1}\left(P_1\cap\cdots\cap P_{i-1}\cap F_i\cap F_{i+1}\cap\cdots\cap F_n\right)$ (où par convention le terme $i=1$ donne $F_1\cap\cdots\cap F_n$, et le terme $i=n+1$ donne $P_1\cap\cdots\cap P_n$).

Présentons-le autrement : notons A_i l'évènement « le premier Face est obtenu au lancer i », et B l'évènement « il n'y a pas eu de Face lors des n premiers lancers ». On considère le système complet d'évènement $(A_1,\ldots,A_n,B)$ (c'est bien un système complet d'évènement car ils sont deux à deux incompatibles : $A_i\cap A_j=\emptyset$ si $i\ne j$, car le **premier** Face ne peut apparaitre à deux lancers différents, et $A_i\cap B=\emptyset$ provient de $i\le n$. Puis, la réunion fait Ω car soit on a Face au cours des n premiers lancers, et donc le premier Face est arrivé au plus tard au n-ième lancer, soit on n'a pas eu Face au cours des n premiers lancers). Alors la formule des probabilités totales donne :

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(E) + P(B)P_B(E).$$

Puis, $A_i = P_1\cap\cdots\cap P_{i-1}\cap F_i$, donc (par indépendance des lancers) $P(A_i) = q^{i-1}p$, $B = P_1\cap\cdots\cap P_n$, donc $P(B) = q^n$. Enfin, $P_B(E) = 1$, et $P_{A_i}(E) = P(F_{i+1}\cap\cdots\cap F_n)$ (car si le premier Face est arrivé au lancer i, jusqu'au lancer i on n'a pas eu de Pile suivant

Face, et le lancer $i+1$ doit nécessairement être un Face, puis le $i+2$ aussi ... jusqu'au n-ième), donc $P_{A_i}(E) = p^{n-i}$ par indépendance des lancers.

Remarque 2. *Il serait plus juste d'écrire la formule des probabilités totales par* $P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap E) + P(B \cap E)$, *et de dire* $A_i \cap E = A_i \cap \big(F_{i+1} \cap \cdots \cap F_n\big)$, $B \subset E$, *et comme* A_i *ne concerne que les tirages numéro* 1 *à* i, *et* $\big(F_{i+1} \cap \cdots \cap F_n\big)$ *que les tirages* $i+1$ *à* n, *par indépendance des lancers,* A_i *et* $\big(F_{i+1} \cap \cdots \cap F_n\big)$ *sont indépendants, ce qui donne* $P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P\big(F_{i+1} \cap \cdots \cap F_n\big) + P(B)$.

On a alors $P(E) = q^n + \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} p p^{n-i} = q^n + \dfrac{p^{n+1}}{q} \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{q}{p}\right)^i = q^n + \dfrac{p^{n+1}}{q} \dfrac{\frac{q}{p} - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}}{1 - \frac{q}{p}} = q^n + p\dfrac{p^n - q^n}{p-q} = \boxed{\dfrac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q}}$.

Exercice 3 Par la formule des probabilités composées : soit B_i :« on tire une boule blanche au i-ème tirage », alors on cherche

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 \cdots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) &= P_{B_1 \cap B_2 \cdots \cap B_{k-1}}(\overline{B_k}) \times P_{B_1 \cap B_2 \cdots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times \cdots \times P_{B_1}(B_2) \times P(B_1) \\ &= \frac{1}{n-k+1} \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \cdots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-1}{n} = \boxed{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

En effet, lors du tirage numéro i, on a $n-i+1$ boules dans l'urnes, et si on n'a tiré avant que des boules blanches, lors du tirage numéro i il y a $n-i$ boules blanches, d'où (par exemple) $P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

Exercice 4 **1)** $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un système complet d'évènements, car $A_k \cap A_j = \emptyset$ si $j \neq k$ (une boule n'a qu'un seul numéro) et $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$ (car la deuxième boule tirée a un numéro compris entre 1 et n). Notons E l'évènement qui nous intéresse. Alors la formule des probabilités totales donne $P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(E \cap A_k)$.

1a) Or, $E \cap A_k = \underbrace{\text{« Le premier tirage amène une boule de numéro } \leq k \text{ »}}_{=B_k} \cap A_k$, donc $P(E \cap A_k) = P(B_k) P_{B_k}(A_k)$. Si le tirage est avec remise, les tirages sont indépendants, donc comme B_k concerne le premier tirage, et A_k le second, on a $P_{B_k}(A_k) = P(A_k) = \dfrac{1}{n}$, et $P(B_k) = \dfrac{k}{n}$ (le numéro du tirage dans une urne suit une loi uniforme), et donc $P(E) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2} = \boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$.

1b) Si le tirage est sans remise, $E \cap A_k = \underbrace{\text{« Le premier tirage amène une boule de numéro } < k \text{ »}}_{=B_k} \cap A_k$ (car si on tire la boule numéro k au deuxième tirage, on n'a pas pu la tirer au premier), puis $P(E \cap A_k) = P(B_k) P_{B_k}(A_k)$. Or, $P_{B_k}(A_k) = \dfrac{1}{n-1}$, et $P(B_k) = \dfrac{k-1}{n}$, et donc $P(E) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k-1}{n(n-1)} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

2a) $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un système complet d'évènements (idem qu'avant), et si E est l'évènement qui nous intéresse, la formule des probabilités totales donne $P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(E \cap A_k)$. Or,

$$(E \cap A_k) = A_k \cap \underbrace{\text{« les } p-1 \text{ premiers tirages ont amenés que des boules avec un numéro au plus } k-1 \text{ »}}_{=B_k}$$

(car il n'y a pas remise, donc pour avoir la boule k au tirage numéro p, on ne l'a pas eu avant). On modélise un tirage de $p-1$ boules sans remise dans une urne contenant les boules 1 à n par une application injective de $[\![1, p-1]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, l'ensemble des telles applications étant alors muni de la probabilité uniforme. Alors, avoir que des numéros au plus $k-1$ revient à ne considérer que les applications injectives de $[\![1, p-1]\!]$ dans $[\![1, k-1]\!]$. Donc

$$P(B_k) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+2)}$$

(on rappelle que le nombre d'applications injectives de $[\![1, r]\!]$ dans $[\![1, s]\!]$ est $s(s-1)\dots(s-r+1)$).

On peut remarquer que si $p-1 \geq k$, alors $P(B_k) = 0$ (car il est impossible de tirer sans remise plus de fois qu'on a de boules autorisées !). Puis $P_{B_k}(A_k) = \dfrac{1}{n-p+1}$ (car sachant B_k, au moment du p-ième tirage, il y a $n-(p-1)$ boules dans l'urne, et toutes sont supérieures ou égales à k).

Donc $P(E) = \dfrac{1}{n} \sum_{k=p}^{n} \dfrac{(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}$.

Remarque 3. Une autre façon de calculer cette probabilité. $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ *est un système complet d'évènements (idem qu'avant), et si* E *est l'évènement qui nous intéresse, la formule des probabilités totales donne* $P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(E)$. *Or,*

$$P_{A_k}(E) = P_{A_k}(\text{« les } p-1 \text{ premiers tirages ont amenés que des boules avec un numéro au plus } k-1 \text{ »})$$

(car il n'y a pas tirage, donc pour avoir la boule k *au tirage numéro* p*, on ne l'a pas eu avant). On modélise un tirage de* $p-1$ *boules sans remise dans une urne contenant les boules* 1 *à* n *par une application injective de* $[\![1, p-1]\!]$ *dans* $[\![1, n]\!]$*, l'ensemble des telles applications étant alors muni de la probabilité uniforme.* **Mais ici, la boule numéro k est interdite (car on regarde la probabilité P_{A_k}, donc elle est apparue au tirage numéro p et pas avant), donc on regarde les applications injectives de $[\![1, p-1]\!]$ dans**

un ensemble de cardinal $n-1$ **(à savoir** $[\![1,n]\!]\setminus\{k\}$**)**. *Alors, avoir que des numéros au plus $k-1$ revient à ne considérer que les applications injectives de $[\![1,p-1]\!]$ dans $[\![1,k-1]\!]$. Donc*

$$P_{A_k}(E)=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}=\frac{(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}$$

(on rappelle que le nombre d'applications injectives de $[\![1,r]\!]$ dans $[\![1,s]\!]$ est $s(s-1)\dots(s-r+1)$).

On peut remarquer que si $p-1\geq k$, alors $P_{A_k}(E)=0$ (car il est impossible de tirer sans remise plus de fois qu'on a de boules autorisées !). Puis, $P(A_k)=\dfrac{1}{n}$ si $k\leq n$ (il faut qu'il y ait encore des boules dans l'urne, mais aucune n'a plus de chance d'être piochée qu'une autre ; si on n'est pas convaincu par ce raisonnement, on peut utliser les applications injectives de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$: les cas favorables sont celles qui envoient p sur k, il y en a donc $(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$, on divise par le nombre de cas possibles, $n(n-1)\dots(n-p+1)$, et on retrouve le même résultat). Donc $P(E)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\frac{(k-1)(k-2)\dots(k-p+1)}{(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}$.

2b) Pour faire le lien avec ce qui précède, et si on admet un instant la formule de l'énoncé : $P(E)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n-1}{p-1}}=\frac{\binom{n}{p}}{n\binom{n-1}{p-1}}=\boxed{\frac{1}{p}}$.

La formule de l'énoncé se montre par récurrence sur n : si $n=p$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1}=\binom{p-1}{p-1}=1=\binom{n}{p}$, d'où l'initialisation. Puis, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k-1}{p-1}=\sum_{k=p}^{n}\binom{k-1}{p-1}+\binom{n}{p-1}\underset{HR_n}{=}\binom{n}{p}+\binom{n}{p-1}=\binom{n+1}{p}$ par la formule de Pascal, d'où l'hérédité.

Exercice 5 **1)** Notons A_k l'évènement « le plus grand numéro de la poignée est au plus k ». Alors $A_k=B_k\cup A_{k-1}$, et B_k et A_{k-1} sont incompatibles, donc $P(B_k)=P(A_k)-P(A_{k-1})$.

Or, A_k est l'évènement « on retire en une fois de l'urne une poignée aléatoire de p boules parmi les boules numérotées de 1 à k », et comme on met la probabilité uniforme sur les poignées (aucune n'est plus probable qu'une autre), alors $P(A_k)=\dfrac{\binom{k}{p}}{\binom{N}{p}}$, et donc $P(B_k)=\dfrac{\binom{k}{p}}{\binom{N}{p}}-\dfrac{\binom{k-1}{p}}{\binom{N}{p}}=\boxed{\dfrac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{N}{p}}}$ (d'après la formule de Pascal).

Remarque 4. *On peut aussi dire directement : une poignée de p boules qui a k comme plus grand élément est formé de la boule k et d'une poignée de $p-1$ boule numérotées de 1 à $k-1$, il y en a donc $\dbinom{k-1}{p-1}$. Comme il y a $\dbinom{N}{p}$ poignées possibles, et qu'on considère l'équiprobabilité sur les poignées, on retrouve $P(B_k)=\dfrac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{N}{p}}$.*

2) Comme $(B_k)_{p\leq k\leq N}$ est un système complet d'évènements, on a $1=\displaystyle\sum_{k=p}^{N}P(B_k)$, ce qui donne en remplaçant la formule voulue.

Exercice 6 **1)** Le joueur k rate sa i-ième tentative si et seulement si tout le monde a gagné $i-1$ tentatives, et les $k-1$ premiers ont gagné encore une fois de plus, et le k-ième perd. Ce n'est pas précisé, mais on va supposer que les essais des joueurs sont indépendants les uns des autres (et je rappelle que le « et » se traduit par des intersections ...). La probabilité cherchée est donc $\boxed{p^{(i-1)n+k-1}q}$.

2) Si on note E_i l'évènement « le k-ième joueur perde lors de sa i-ème tentative », et E « le k-ième joueur perd », alors $E=\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty}E_i$. Or, les E_i sont des évènements deux à deux incompatibles (car dès qu'on perd, le jeu se termine), et donc par σ-additivité de P, $P(E)=\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}P(E_i)=\sum_{i=1}^{+\infty}p^{(i-1)n+k-1}q=qp^{k-1}\sum_{i=1}^{+\infty}(p^n)^{i-1}=\boxed{\frac{qp^{k-1}}{1-p^n}}$ (car la série converge, puisque série géométrique de raison $p\in]-1,1[$).

Exercice 7 **1)** Comme le jeu s'arrête dès qu'un joueur gagne, pour qu'il y ait un $(2n-1)$-ième lancer, il faut et il suffit que lors des $(2n-2)$ premiers lancers, ni A ni B ne gagne. Donc

$$A_{2n-1}=\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\dots\cap\overline{A_{2n-3}}\cap\overline{B_{2n-2}}\cap A_{2n-1}$$

(ce qu'on peut dire en disant $A_{2n-1}\subset\overline{A_{2i-1}}$ pour $i\leq n-1$ et $A_{2n-1}\subset\overline{B_{2i}}$ pour $i\leq n-1$).
Par la formule des proabilités composées, on a alors

$$\begin{aligned}P(A_{2n-1})&=P(\overline{A_1})\times P_{\overline{A_1}}(\overline{B_2})\times\dots\times P_{\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\dots\cap\overline{B_{2n-4}}}(\overline{A_{2n-3}})\times P_{\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\dots\cap\overline{A_{2n-3}}}(\overline{B_{2n-2}})\times P_{\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\dots\cap\overline{B_{2n-2}}}(A_{2n-1})\\&=\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}\times\dots\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\left(\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}\right)^{n-1}\frac{2}{6}=\boxed{\frac{1}{3^n}}\end{aligned}$$

En effet, le lancer de dé numéro i n'influe sur les suivants que pour savoir si le jeu s'est arrêté au lancer i ou non. Or, si on sait $\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\dots\cap\overline{A_{2i-3}}$, alors le lancer $2i-2$ a lieu, et lors de ce lancer, le résultat est une variable uniforme qui prend comme valeurs 1 à 6, et comme trois de ces valeurs donnent un échec pour B, on a $P_{\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\dots\cap\overline{A_{2i-3}}}(\overline{B_{2i-2}})=\dfrac{3}{6}$. De même, si on sait $\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\dots\cap\overline{B_{2i-2}}$, alors le lancer $2i-1$ a lieu, et lors de ce lancer, le résultat est une variable uniforme qui prend comme valeurs 1 à 6, et comme quatre de ces valeurs donnent un échec pour A, on a $P_{\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\dots\cap\overline{B_{2i-2}}}(\overline{A_{2i-1}})=\dfrac{4}{6}$ et $P_{\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\dots\cap\overline{B_{2i-2}}}(A_{2i-1})=\dfrac{2}{6}$.

De même, on a $B_{2n} = \overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \cdots \cap \overline{B_{2n-2}} \cap \overline{A_{2n-1}} \cap B_{2n}$, et

$$P(B_{2n}) = P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(\overline{B_2}) \times \cdots \times P_{\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\cdots\cap\overline{B_2}\cap\cdots\cap\overline{B_{2n-2}}}(\overline{A_{2n-1}}) \times P_{\overline{A_1}\cap\overline{B_2}\cap\cdots\cap\overline{A_{2n-1}}}(B_{2n}) = \left(\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}\right)^{n-1}\frac{4}{6}\frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{3^n}}.$$

2) $G_A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{2n-1}$ et comme les A_{2n-1} sont deux à deux incompatibles (car, d'après la définition du jeu, on ne peut gagner qu'à un seul lancer), par σ-additivité de P, on a :

$$P(G_A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_{2n-1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

De même, $G_B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{2n}$ et comme les B_{2n} sont deux à deux incompatibles, par σ-additivité de P, on a :

$$P(G_B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_{2n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Or, $H = \overline{G_A \cup G_B}$, et comme G_A et G_B sont incompatibles (même raison), on a

$$P(H) = 1 - P(G_A \cup G_B) = 1 - P(G_A) - P(G_B) = \boxed{0}$$

On interprète ceci en disant que le jeu se termine au bout d'un nombre fini de lancers avec probabilité 1 (c'est-à-dire *presque sûrement*).

Exercice 8 **1)** Notons N_i l'évènement « au tirage i on obtient une boule noire ». Alors $A_n = N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap A_n$ (en effet, si c'est au n-ième tirage que l'on a la *première* boule blanche, c'est que les $n-1$ tirages précédents n'ont ramenés que des boules noires). La formule des probabilités composées donne alors :

$$P(A_n) = P(N_1)\left(\prod_{k=2}^{n-1} P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(N_k)\right) P_{N_1\cap\cdots\cap N_{n-1}}(A_n)$$

$P(N_1) = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1}$, puis le fait de savoir $N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1}$ assure que le k-ième tirage a lieu (car on n'a pas encore eu de boule blanche), de plus l'urne a doublé de taille $k-1$ fois (donc le nombre de boules dans l'urne est une suite géométrique de raison 2), et comme elle contenait 2 boules pour le premier tirage, pour le k-ième tirage elle va en contenir 2^k (dont $2^k - 1$ noires et 1 blanche). Donc $P_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(N_k) = \frac{2^k-1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$ et $P_{N_1\cap\cdots\cap N_{n-1}}(A_n) = \frac{1}{2^n}$. D'où l'expression.

2) $-\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\left(-\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k}$ car $\frac{1}{2^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (et $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$). Or, $\frac{1}{2^k} \geq 0$ pour tout entier k et $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, donc convergente. Par le critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{k\geq 1} -\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$ converge, et donc $\sum_{k\geq 1} \ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$ aussi.

Puis, si on note $u_n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$ (pour $n \geq 2$), alors $u_n > 0$ pour tout entier $n \geq 2$ (car on fait le produit de nombres > 0), donc $\ln(u_n)$ existe, et $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$ est la somme partielle (d'indice $n-1$) de la série précédemment étudiée, qui converge, donc la suite $\left(\ln(u_n)\right)_{n\geq 2}$ est convergente (vers un réel ℓ). Comme l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, (u_n) converge aussi (vers un réel > 0 puisque c'est e^ℓ). Or, $P(A_n) = \frac{u_n}{2^n}$, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0}$.

Remarque 5. *Plus rapide : il est direct que* $0 \leq 1 - \frac{1}{2^k} \leq 1$ *pour* $1 \leq k \leq n-1$*, donc par multiplication d'inégalités positives, il vient* $0 \leq P(A_n) \leq \frac{1}{2^n}$*, et donc le théorème des gendarmes donne directement* $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$*. La méthode précédente (certes plus compliqué) a l'avantage d'aider pour la question suivante.*

3) Notons B l'évènement « la boule blanche est obtenue à l'un des tirages », alors $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, donc par σ-additivité de P, (la série $\sum_{n\geq 1} P(A_n)$ converge et) $P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$. On veut donc savoir si $P(B) = 1$, ou ce qui revient au même, si $P(\overline{B}) = 0$. Or, $\overline{B}$ est l'évènement « on obtient une boule noire à chaque tirage », autrement dit $\overline{B} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} N_n$.

Par limite monotone, on sait alors : $P(\overline{B}) = \lim_{n\to+\infty} P(N_1\cap\cdots\cap N_n)$ (car la suite $(N_1\cap\cdots\cap N_n)_{n\geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion, et l'intersection de tous ses éléments fait $\overline{B}$). Or, comme à la première question, on a $P(N_1 \cap \cdots \cap N_n) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k}\right) = u_{n+1}$. De plus, on a vu que la suite (u_n) converge vers un réel > 0, donc $P(\overline{B}) > 0$, autrement dit $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < 1$.

Interprétons ceci : B est l'évènement « le jeu se termine en un nombre fini d'étapes », et comme il n'est pas de probabilité 1, on sait que la probabilité que le jeu se termine est strictement plus petite que 1. Dis autrement, la probabilité que le jeu ne se termine jamais est strictement positive.

Exercice 9 Remarquons que $B \subset B \cup C$, donc $0 < P(B) \leq P(B \cup C)$, donc la probabilité conditionnelle considérée existe bien. $P_{B\cup C}(A) = \dfrac{P\big(A \cap (B \cup C)\big)}{P(B\cup C)} = \dfrac{P\big((A\cap B)\cup(A\cap C)\big)}{P(B\cup C)} = \dfrac{P(A\cap B)+P(A\cap C)}{P(B\cup C)}$ car $A\cap B$ et $A \cap C$ sont incompatibles, puisque $B \cap C = \emptyset$.

Donc, par la formule des probabilités composées, on obtient $\boxed{P_{B\cup C}(A) = \dfrac{P(B)}{P(B\cup C)}P_B(A) + \dfrac{P(C)}{P(B\cup C)}P_C(A)}$.

Exercice 10 Notons T l'évènement « le test est positif », M l'évènement « l'individu est malade ». L'énoncé nous donne :

$$P(M) = \frac{1}{100000} \qquad P_M(T) = \frac{95}{100} \qquad P_{\overline{M}}(T) = \frac{5}{1000}$$

On veut $P_T(M)$. On va utiliser la formule de Bayes :

$$P_T(M) = \frac{P(T\cap M)}{P(T)} = \frac{P(M)P_M(T)}{P(T)}$$

et on calcule ensuite $P(T)$ à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'évènement $\big(M, \overline{M}\big)$: $P(T) = P(M)P_M(T) + P\big(\overline{M}\big)P_{\overline{M}}(T) = P(M)P_M(T) + \big(1-P(M)\big)P_{\overline{M}}(T)$. Par conséquent,

$$P_T(M) = \frac{P(M)P_M(T)}{P(M)P_M(T) + \big(1-P(M)\big)P_{\overline{M}}(T)} = \frac{190}{100189} \approx \boxed{0.19\%}$$

Ce test n'est pas du tout fiable pour déterminer si un individu est malade ! ! !

Par contre, si le test est négatif, et que l'on cherche la probabilité que l'individu soit effectivement sain, on veut (de même) :

$$P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{P(\overline{M})P_{\overline{M}}(\overline{T})}{P(M)P_M(\overline{T}) + \big(1-P(M)\big)P_{\overline{M}}(\overline{T})} = \frac{\big(1-P(M)\big)\big(1-P_{\overline{M}}(T)\big)}{P(M)\big(1-P_M(T)\big) + \big(1-P(M)\big)\big(1-P_{\overline{M}}(T)\big)} = \frac{19899801}{19899811} \approx \boxed{99,99995\%}$$

Donc ce test est très utile pour faire une première préselection (tous ceux qui ont un test négatif peuvent être considérés comme sains).

Exercice 11 Notons U_k l'évènement « on choisit l'urne numéro k », pour $0 \leq k \leq n$. « On choisit une urne au hasard » se traduit par $P\big(U_k\big) = \dfrac{1}{n+1}$ (car on a $n+1$ urnes, et que l'on met la probabilité uniforme sur l'ensemble des urnes).
Notons B_i l'évènement « obtenir une boule blanche au i-ième tirage ». Alors l'évènement qui nous intéresse est $B_1 \cap B_2$. Si on lui applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\big(U_k\big)_{0\leq k\leq n}$ (c'est bien un système complet d'évènements, car on choisit une seule urne (ce qui assure l'incompatibilité deux à deux), et forcément une qui a un numéro entre 0 et n (donc la réunion est l'évènement certain)) :

$$P(B_1\cap B_2) = \sum_{k=0}^{n} P\big(U_k\big)P_{U_k}\big(B_1\cap B_2\big) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_{U_k}\big(B_1 \cap B_2\big)$$

1) Si le tirage dans l'urne (*une fois l'urne fixée*) se fait avec remise, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, B_1 et B_2 sont indépendants pour la probabilité P_{U_k}, et donc

$$P(B_1\cap B_2) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_{U_k}\big(B_1\big)P_{U_k}\big(B_2\big) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\times\frac{k}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)} = \boxed{\frac{2n+1}{6n}}$$

2) Si le tirage dans l'urne se fait sans remise, on utilise la formule des probabilités composées :

$$P(B_1\cap B_2) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_{U_k}\big(B_1\big)P_{U_k\cap B_1}\big(B_2\big) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{k-1}{n-1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n-1)n(n+1)} - \frac{n(n+1)}{2(n-1)n(n+1)} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Exercice 12 **1)** $\boxed{a_0 = 1,\ b_0 = c_0 = 0}$.

2) Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_n, B_n, C_n) (ils sont deux à deux disjoints, car la cellule n'occupe qu'un seul point à un instant donné, et c'est forcément A, B ou C) :

$$a_{n+1} = P_{A_n}(A_{n+1})\times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})\times P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})\times P(C_n) = \boxed{0\times a_n + \frac{1}{2}\times b_n + \frac{1}{2}\times c_n}$$

$$b_{n+1} = P_{A_n}(B_{n+1})\times P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})\times P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})\times P(C_n) = \boxed{\frac{1}{2}\times a_n + 0\times b_n + \frac{1}{2}\times c_n}$$

$$c_{n+1} = P_{A_n}(C_{n+1})\times P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})\times P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})\times P(C_n) = \boxed{\frac{1}{2}\times a_n + \frac{1}{2}\times b_n + 0\times c_n}$$

Remarque 6. *En toute rigueur, il ne faut appliquer la formule des probabilités totales écrite ci-dessus que pour $n \geq 2$, car sinon les probabilités conditionnelles ne sont pas définies ($P(B_0) = P(C_0) = P(A_1) = 0$), mais on vérifie directement que les relations trouvées conviennent encore pour $n = 0$ et $n = 1$.*
Et pour pousser encore plus loin la rigueur, il faudrait faire ceci en même temps qu'une récurrence sur n donnant (A_n, B_n, C_n) chacun de probabilité non nulle !

3) Rappelons que $a_n + b_n + c_n = 1$ (car (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènements), ce qui donne $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n + c_n) = \dfrac{1}{2}(1-a_n) = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}$ (et de même, $b_{n+1} = -\dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}$ et $c_{n+1} = -\dfrac{1}{2}c_n + \dfrac{1}{2}$). Ce sont donc des suites arithmético-géométriques, cherchons le point fixe $\alpha = -\dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{3}$. Alors $a_{n+1} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\left(a_n - \dfrac{1}{3}\right)$, donc $\left(a_n - \dfrac{1}{3}\right)_{n\geq 0}$ (et aussi $\left(b_n - \dfrac{1}{3}\right)_{n\geq 0}$ et $\left(c_n - \dfrac{1}{3}\right)_{n\geq 0}$) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$, donc $a_n - \dfrac{1}{3} = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\left(a_0 - \dfrac{1}{3}\right)$ (et de même $b_n - \dfrac{1}{3} =$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(b_0-\frac{1}{3}\right)$ et $c_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(c_0-\frac{1}{3}\right)$), donc en reportant les valeurs de a_0, b_0 et c_0, on trouve $\boxed{a_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ et $\boxed{b_n=c_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

Autre façon : De la question 2, on a $a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2}$, mais aussi $b_n=\frac{a_{n-1}+c_{n-1}}{2}$ et $c_n=\frac{b_{n-1}+a_{n-1}}{2}$, donc en reportant, on trouve $2a_{n+1}=\frac{a_{n-1}+c_{n-1}}{2}+\frac{b_{n-1}+a_{n-1}}{2}=a_{n-1}+\frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}=a_{n-1}+a_n$, donc $a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{2}a_{n-1}=0$, donc (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, et son équation caractéristique est $r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}$, de racines réelles 1 et $-\frac{1}{2}$, donc il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a_n=\lambda 1^n+\mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. On a par symétrie que (b_n) et (c_n) sont des suites linéaires récurrents d'ordre 2 ayant encore $r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}$ comme équation caractéristique. Il suffit ensuite de reporter avec les valeurs de a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1 pour trouver les constantes, et obtenir le même résultat que précédemment.

Autre façon : On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$, alors en notant $X_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$, on a $X_{n+1}=AX_n$, donc par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, $X_n=A^nX_0=A^n\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Donc il faut calculer A^n, et pour cela, on diagonalise A (c'est possible car elle est symétrique réelle) ...

Exercice 13 **1)** Notons U_n l'évenement « on tire au n-ième tirage dans l'urne U » et $p_n=P(U_n)$. Les évenements U_n et $\overline{U_n}$ forment un système complet d'évenements, donc par la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P_{U_n}(U_{n+1})P(U_n)+P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})P(\overline{U_n})=\frac{1}{2}\times p_n+\frac{1}{3}(1-p_n)=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{3}$$

avec $p_1=1$ car l'évenement U_1 est certain par hypothèse. On a donc une suite arithmético-géométrique, on cherche un point fixe $p=\frac{1}{6}p+\frac{1}{3}\Leftrightarrow p=\frac{2}{5}$, puis la suite (p_n-p) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ puisque $p_{n+1}-p=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{6}p+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}(p_n-p)$, donc $p_n-p=\frac{1}{6^{n-1}}(p_1-p)$, donc $p_n=\frac{2}{5}+\frac{1}{6^{n-1}}\left(1-\frac{2}{5}\right)=\boxed{\frac{2}{5}+\frac{1}{6^{n-1}}\frac{3}{5}}$.

2) Notons B_n l'évenement « on tire une boule blanche au n-ième coup ». Alors, par la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(U_n,\overline{U_n})$, on a :

$$P(B_n) = P_{U_n}(B_n)P(U_n)+P_{\overline{U_n}}(B_n)P(\overline{U_n})=\frac{1}{2}\times p_n+\frac{2}{3}\times(1-p_n)=-\frac{1}{6}p_n+\frac{2}{3}=\boxed{\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\frac{1}{6^{n-1}}}$$

Exercice 14 **1)** A et B sont incompatibles donne $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1$.

2) La réalisation de B entraîne celle de A se traduit par $B\subset A$, et donc $P(A\cup B)=P(A)=0,6$.

3) A et B sont indépendants (pour P) donne $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0,24$. Or, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,76$.

Exercice 15 Notons F_k l'évènement « obtenir Face au k-ième lancer », et P_k l'évènement « obtenir Pile au k-ième lancer ».

1) Utilisons la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements qui décrit l'issue lors des tirages $2n-1$ et $2n$, $\big(F_{2n-1}\cap F_{2n},F_{2n-1}\cap P_{2n},P_{2n-1}\cap F_{2n},P_{2n-1}\cap P_{2n}\big)$:

$$P(O_n)=P\big(F_{2n-1}\cap F_{2n}\cap O_n\big)+P\big(F_{2n-1}\cap P_{2n}\cap O_n\big)+P\big(P_{2n-1}\cap F_{2n}\cap O_n\big)+P\big(P_{2n-1}\cap P_{2n}\cap O_n\big)$$

Or, $P\big(F_{2n-1}\cap F_{2n}\cap O_n\big)=0$ car $F_{2n-1}\cap F_{2n}\cap O_n=\emptyset$, puisque si à l'issu du $2n$-ième lancer on a eu autant de Piles que de Faces, et qu'aux lancers $2n-1$ et $2n$ on a eu Face, c'est qu'avant on a eu au moins deux Piles de plus que de Face (ce qui contredit le fait que la personne n'a ni perdu, ni gagné). De même, $P\big(P_{2n-1}\cap P_{2n}\cap O_n\big)=0$.

Puis, $F_{2n-1}\cap P_{2n}\cap O_n=F_{2n-1}\cap P_{2n}\cap O_{n-1}$. En effet, $F_{2n-1}\cap P_{2n}\cap O_{n-1}\subset O_n$, puisque, si jusqu'au lancer $2n-2$ on a eu autant de Pile que de Face, faire Face puis Pile ne change pas cela, et si de plus après le lancer O_{2n-2} on a autant de Pile que de Face, alors cela reste vrai en faisant Face puis Pile, et le joueur ne pourra gagner ou perdre lors du lancer $2n-1$ et $2n$. D'où l'inclusion $\big(F_{2n-1}\cap P_{2n}\cap O_{n-1}\big)\subset\big(F_{2n-1}\cap P_{2n}\cap O_n\big)$.

L'inclusion réciproque provient de ce que si O_n est réalisé, alors au lancer $2n-2$ le joueur n'a ni gagné, ni perdu, et si de plus il fait ensuite Pile et Face et qu'il se retrouve avec autant de Pile que de Face, cela était déjà vrai à la fin du lancer numéro $2n-2$.

Or, par indépendance des lancers, F_{2n-1}, P_{2n} et O_{n-1} sont mutuellement indépendants (car ce sont des évènements qui concernent des lancers différents), et donc $P(F_{2n-1}\cap P_{2n}\cap O_n)=P(F_{2n-1})P(P_{2n})P(O_{n-1})=pqP(O_n)$.

De même, $P\big(P_{2n-1}\cap F_{2n}\cap O_n\big)=pqP(O_n)$. Par conséquent,

$$P(O_n)=2pqP(O_{n-1})$$

La suite $\big(P(O_n)\big)_{n\geq 1}$ est donc une suite géométrique de raison $2pq$, $P(O_1)=P\big((P_1\cap F_2)\cup(F_1\cap P_2)\big)=2pq$, donc $\boxed{P(O_n)=(2pq)^n}$.

2) Notons p_n le nombre de Piles obtenus lors des $2n$ premiers lancers, f_n celui de Faces. Alors on a $p_n+f_n=2n$. Si $p_n<f_n$, alors $p_n\leq f_n-1$ (car p_n et f_n sont entiers), donc $2n\leq 2f_n-1$, donc $f_n\geq n+\frac{1}{2}$ et donc $f_n\geq n+1$ (car f_n est entier). De même, $2p_n\leq 2n-1$, donc $p_n\leq n-\frac{1}{2}$, donc $p_n\leq n-1$. Dans ce cas, l'écart entre le nombre de Piles et de Faces est au moins 2, et le jeu s'est terminé au plus tard au lancer numéro $2n$. De même si $p_n>f_n$.

Donc l'évènement « la partie dure strictement plus de $2n$ coups » est l'évènement O_n.

3) Notons G_n l'évènement « la personne gagne au $2n$-ième lancer ». Remarquons que le jeu ne peut se gagner ou se perdre sur un lancer impair $2p+1$, car le jeu ayant duré plus que $2p$ lancers, on a réalisé O_p d'après la question précédente, et donc à la fin du

$2p$-ième lancer, on avait autant de Piles que de Faces. Donc, juste avec le lancer $2p+1$, on ne peut pas avoir un écart de 2 (ou plus) entre le nombre de Piles et de Faces.

Remarquons que $G_n \subset O_{n-1}$, car si la personne gagne au $2n$-ième lancer, c'est qu'après le $2n-2$-ième lancer, on avait ni perdu, ni gagné. Donc $G_n = O_{n-1} \cap G_n$. Utilisons alors la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements qui décrit l'issue lors des tirages $2n-1$ et $2n$, $\big(F_{2n-1} \cap F_{2n}, F_{2n-1} \cap P_{2n}, P_{2n-1} \cap F_{2n}, P_{2n-1} \cap P_{2n}\big)$:

$$\begin{aligned} P(G_n) &= P\big(O_{n-1} \cap G_n\big) \\ &= P\big(\underbrace{F_{2n-1} \cap F_{2n} \cap O_{n-1} \cap G_n}_{=\emptyset}\big) + P\big(\underbrace{F_{2n-1} \cap P_{2n} \cap O_{n-1} \cap G_n}_{=\emptyset}\big) + P\big(\underbrace{P_{2n-1} \cap F_{2n} \cap O_{n-1} \cap G_n}_{=\emptyset}\big) \\ &\quad + P\big(\underbrace{P_{2n-1} \cap P_{2n} \cap O_{n-1}}_{\subset G_n} \cap G_n\big) \end{aligned}$$

Donc $P(G_n) = P\big(P_{2n-1} \cap P_{2n} \cap O_{n-1}\big)$, et comme ces évènements sont mutuellement indépendants pour P (car ils concernent des lancers différents), on a $P(G_n) = P\big(P_{2n-1}\big)P\big(P_{2n}\big)P\big(O_{n-1}\big) = \boxed{p^2(2pq)^{n-1}}$.

4) On a vu que l'individu ne pouvait gagner qu'à la suite d'un lancer pair, donc l'évènement G=« l'individu gagne » est $G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$. Comme les évènements G_n sont deux à deux incompatibles (on ne gagne qu'une fois), par σ-additivité de P, on a

$$P(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(2pq)^{n-1} = \boxed{\frac{p^2}{1-2pq}}$$

Remarque 7. *De même, on a que la probabilité que l'individu perde est* $\dfrac{q^2}{1-2pq}$*, et donc que la probabilité que le jeu s'arrête au bout d'un temps fini est de* $\dfrac{p^2+q^2}{1-2pq} = 1$ *(car* $p+q=1$*).*

Exercice 16 Notons R_k l'évènement « obtenir une boule rouge au k-ième tirage », N_k pour la boule noire, B_k pour la boule blanche.

1) $\boxed{p_0 = \dfrac{1}{4}}$. $p_1 = P\big((R_1 \cap B_2) \cup B_1\big) = P(R_1)P_{R_1}(B_2) + P(B_1) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$.

2) Supposons que l'on parte d'une urne avec r boules rouges, et notons G_r l'évènement « le joueur finit par gagner ». On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (N_1, B_1, R_1) (c'en est bien un, car on ne tire qu'une boule à la fois, donc ils sont deux à deux incompatibles, et au premier tirage on tire nécessairement une boule noire, rouge ou blanche, donc $N_1 \cup B_1 \cup R_1 = \Omega$ est l'évènement certain), alors :

$$p_r = P(G_r) = P(\underbrace{N_1 \cap G_r}_{=\emptyset}) + P(R_1) \underbrace{P_{R_1}(G_r)}_{=P(G_{r-1})=p_{r-1}} + P(B_1) \underbrace{P_{B_1}(G_r)}_{=1} = 0 + \frac{r}{r+4}p_{r-1} + \frac{1}{r+4}$$

En effet, si on sait qu'au premier tirage on a eu une boule rouge, on continue de jouer, et on peut considérer qu'on repart du début, avec par contre plus que $r-1$ boules rouges au lieu de r (pour la suite du jeu, ce n'est pas important de savoir qu'au premier tirage on a eu rouge. La seule chose importante, est de savoir combien de boules rouges on avait au départ). Donc $P_{R_1}(E_r) = P(E_{r-1})$.

On a alors par récurrence directe $\boxed{p_r = \dfrac{1}{4}}$.

Exercice 17 Notons P_k l'évènement « obtenir pile au k-ième lancer », et F_k pour face.

1a) $\boxed{p_1 = 0}$ (il faut au moins deux lancers pour avoir deux piles !), $p_2 = P(P_1 \cap P_2) = \boxed{p^2}$ (les lancers d'une pièce sont indépendants), $p_3 = P\big(F_1 \cap P_2 \cap P_3\big) = \boxed{qp^2}$,

$$p_4 = P\big((P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)\big) = pqp^2 + q^2p^2 = (p+q)qp^2 = \boxed{qp^2}.$$

1b) $P(B_1) = p_1 = \boxed{0}$, $\boxed{P(B_2) = p_2}$,

$$P(B_3) = P\big((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)\big) = p^2 + qp^2 = \boxed{(1+q)p^2},$$

(on a aussi $B_3 = (P_1 \cap P_2) \cup (P_2 \cap P_3)$, mais présenté ainsi, l'union n'est pas entre évènements incompatibles, donc on ne peut pas calculer la probabilité ! D'où la nécessité de spécifier F_1 ...)

$$P(B_4) = P\big((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_2 \cap P_2 \cap P_3)\big) = p^2 + 2qp^2 = \boxed{(1+2q)p^2}.$$

Il est direct que, pour $n \geq 1$, $B_n \subset B_{n+1}$, donc par croissance de la probabilité, $P(B_n) \leq P(B_{n+1})$, donc la suite $\big(P(B_n)\big)_{n\geq 1}$ est croissante. C'est peut-être plus convaincant d'écrire : pour tout $n \geq 1$, $B_{n+1} = B_n \cup E_{n+1}$, donc $B_n \subset B_{n+1}$.

2a) ★ Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènement $\big(E_{n+1}, \overline{E_{n+1}}\big)$:

$$P(B_{n+1}) = P(E_{n+1} \cap B_{n+1}) + P\big(\overline{E_{n+1}} \cap B_{n+1}\big)$$

Or, $E_{n+1} \subset B_{n+1}$, donc $P(E_{n+1} \cap B_{n+1}) = P(E_{n+1}) = p_{n+1}$, et $\overline{E_{n+1}} \cap B_{n+1} = B_n$ (en effet, $B_n \subset B_{n+1}$ est direct, $B_n \subset \overline{E_{n+1}}$ est vrai car si on a eu deux piles consécutifs lors des n premiers lancers, la première série de pile ne peut se terminer au lancer $n+1$ puisqu'elle a eu lieu avant, donc $B_n \subset \big(\overline{E_{n+1}} \cap B_{n+1}\big)$; l'inclusion réciproque provient de ce que s'il y a eu deux piles consécutifs lors des $n+1$ premiers lancers, et que la première série de deux tels piles ne s'est pas terminée au lancer $n+1$, c'est qu'elle s'ést terminé au plus tard au lancer n, et donc B_n est réalisé). Donc $P(B_{n+1}) = P(B_n) + p_{n+1}$ pour tout entier $n \geq 1$. Comme $P(B_1) = 0$, par somme télescopique, on a $P(B_n) = P(B_n) - P(B_1) = \sum_{k=1}^{n-1} \big(P(B_{k+1}) - P(B_k)\big) = \sum_{k=1}^{n-1} p_{k+1} = \sum_{k=2}^{n} p_k$.

Remarque 8. *On peut aussi justifier l'égalité* $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$*, puis d'utiliser le fait que les* E_k *sont deux à deux incompatibles (à cause du qualificatif « la première fois »), et conclure par* σ*-additivité de* P*.*

★ Montrons que $E_{n+3} = \overline{B_n} \cap F_{n+1} \cap P_{n+2} \cap P_{n+3}$. L'inclusion $E_{n+3} \subset \left(\overline{B_n} \cap F_{n+1} \cap P_{n+2} \cap P_{n+3}\right)$ est directe : si la première série de deux piles consécutifs s'est terminée au lancer $n+3$, c'est qu'au cours des n premiers lancers on n'a pas eu de telles séries (donc $\overline{B_n}$ est réalisé), et les lancers P_{n+2} et P_{n+3} se sont réalisés (c'est la série des deux piles consécutifs se terminant au lancer $n+3$), et nécessairement le lancer $n+1$ a amené face (donc F_{n+1}), car sinon, on aurait eu $P_{n+1} \cap P_{n+2}$, et donc la première série de deux piles consécutifs se serait terminée au plus tard au lancer $n+2$ et pas $n+3$.

Montrons l'inclusion réciproque : si $\overline{B_n}$ est réalisé, et que l'on a face au tirage $n+1$, alors jusqu'au tirage $n+1$ on n'aura pas eu deux piles consécutifs. Donc si on tire deux piles ensuite, ce sera la première série de deux piles consécutifs, et elle se terminera au lancer $n+3$. Donc $\left(\overline{B_n} \cap F_{n+1} \cap P_{n+2} \cap P_{n+3}\right) \subset E_{n+3}$.

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\left(\overline{B_n}, F_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}\right)$ sont mutuellement incompatibles, car ce sont des évènements qui concernent des lancers différents, donc $P(E_{n+3}) = P(\overline{B_n})P(F_{n+1})P(P_{n+2})P(P_{n+3}) = \big(1 - P(B_n)\big)qp^2$.

Remarque 9. *Pour que cela ait du sens, il faut que* $n \geq 1$ *(pour que* $\overline{B_n}$ *existe).*

2b) Si $n \geq 2$, $p_{n+2} - p_{n+3} = \big(1 - P(B_{n-1})\big)qp^2 - \big(1 - P(B_n)\big)qp^2 = \big(P(B_n) - P(B_{n-1})\big)qp^2 = p_n qp^2$.

Pour $n = 1$: $p_3 - p_4 = qp^2 - qp^2 = 0$ et $p_1 = 0$, donc la formule reste vraie.

3a) • $\mathcal{U}$ est inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

• La suite nulle ($u_n = 0$ pour tout entier $n \geq 1$) vérifie $u_{n+3} - u_{n+2} + qp^2 u_n = 0 - 0 + qp^2 \times 0 = 0$ pour tout entier $n \geq 1$, donc appartient à $\mathcal{U}$.

• Soit u et $v \in \mathcal{U}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $w = \lambda u + v$. Alors, pour tout entier $n \geq 1$, $w_n = \lambda u_n + v_n$. Donc pour tout entier $n \geq 1$,

$$w_{n+3} - w_{n+2} + qp^2 w_n = \lambda u_{n+3} + v_{n+3} - (\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) + qp^2(\lambda u_n + v_n) = \lambda(\underbrace{u_{n+3} - u_{n+2} + qp^2 u_n}_{=0 \text{ car } u \in \mathcal{U}}) + \underbrace{v_{n+3} - v_{n+2} + qp^2 v_n}_{=0 \text{ car } v \in \mathcal{U}} = \lambda \times 0 + 0 = 0$$

Donc $w \in \mathcal{U}$.

Conclusion : $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

Remarque 10. *Remarquons que* $f : u \in \mathcal{U} \mapsto (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ *est une application linéaire (évident) et injective : en effet, si* $u \in \mathrm{Ker}(f)$*, alors* $u_1 = u_2 = u_3 = 0$*, et par récurrence triple, on a* $u_n = 0$ *pour tout entier* $n \geq 1$ *(si* $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = 0$*, alors* $u_{n+3} = u_{n+2} - qp^2 u_n = 0 - qp^2 \times 0 = 0$*). Donc* $\mathcal{U}$ *est de dimension finie et* $\dim\left(\mathcal{U}\right) \leq \dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$*.*
On a même f *surjective (et donc* $\dim\left(\mathcal{U}\right) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$*), cela se montre aussi en construisant pour* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *quelconque un antécédent par* f *par récurrence. Pour diverse raison, je n'aime pas cette démonstration, et de toute façon on peut s'en passer, comme le montre la question 3c.*

3b)

$$\begin{array}{rcl} (r^n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{U} & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*,\ r^{n+3} - r^{n+2} + qp^2 r^n = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*,\ r^n\left(r^3 - r^2 + qp^2\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & r^3 - r^2 + qp^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r = 0 \\ & \Leftrightarrow & r^3 - r^2 = -qp^2 = -(1-p)p^2 = p^3 - p^2 \quad \text{ou} \quad r = 0 \end{array}$$

$r^3 - r^2 = p^3 - p^2 \Leftrightarrow r^3 - p^3 - (r^2 - p^2) = 0 \Leftrightarrow (r-p)(r^2 + rp + p^2) - (r-p)(r+p) = 0 \Leftrightarrow (r-p)(r^2 - (1-p)r + p^2 - p) = 0$ a pour racines p, $\dfrac{1 - p + \sqrt{1 + 2p - 3p^2}}{2}$, $\dfrac{1 - p - \sqrt{1 + 2p - 3p^2}}{2}$ (car $1 + 2p - 3p^2 > 0$ pour $p \in [0, 1[$ comme le montre une étude de fonction).

Remarque 11. *Pour* $p = 1$ *ou* $p = 0$*, on a que deux racines à ce polynôme : 0 et 1. Mais le cas* $p = 1$ *n'est pas intéressant ! (ni* $p = 0$ *d'ailleurs). Par contre, pour* $p = \dfrac{2}{3}$*, on a aussi que deux racines :* $\dfrac{2}{3}$ *(qui est double) et* $-\dfrac{1}{3}$*. Dans tous les autres cas, on a trois racines deux à deux distinctes.*

3c) On reporte $p = \dfrac{3}{7}$ dans l'expression trouvée pour les racines, on a bien les valeurs annoncées.

Donc, si on pose $u_n = \left(\dfrac{3}{7}\right)^n$, $v_n = \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$ et $w_n = \left(\dfrac{-2}{7}\right)^n$, alors (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites de $\mathcal{U}$. Elles sont libres : en effet, pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, si $a(u_n) + b(v_n) + c(w_n) = 0$ alors pour tout entier n, $au_n + bv_n + cw_n = 0$, donc pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ on a en particulier le système $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \dfrac{3a + 6b - 2c}{7} = 0 \\ \dfrac{9a + 36b + 4c}{49} = 0 \end{cases}$, qui se résout et donne $a = b = c = 0$ (ce qui justifie au passage que la matrice proposée à la question suivante est bien inversible).

Comme $\mathcal{U}$ est de dimension au plus trois, et a une famille libre de trois vecteurs, c'est que $\mathcal{U}$ est de dimension trois, et $\big((u_n), (v_n), (w_n)\big)$ est une base de $\mathcal{U}$.

3d) Comme $(p_n) \in \mathcal{U}$, il existe $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ tel que $(p_n) = a'(u_n) + b'(v_n) + c'(w_n)$, donc $p_n = \dfrac{1}{7^n}\left(a'3^n + b'6^n + c'(-2)^n\right)$ pour $n \geq 1$. C'est plus simple si on pose $a = 3a'$, $b = 6b'$ et $c = -2c'$, alors on veut $p_n = \dfrac{1}{7^n}\left(a3^{n-1} + b6^{n-1} + c(-2)^{n-1}\right)$ pour $n \geq 1$. (a, b, c) est donc en particulier solution de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 9 & 36 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}$ (système trouvé pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ car $p_1 = 0$, $p_2 = \dfrac{9}{7^2}$ et

$p_3 = \dfrac{36}{7^3}$), donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 9 & 36 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{9}{20} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}$, ce qui donne (après calculs)

$$\boxed{p_n = \frac{9}{8}\frac{1}{7^n}\left(6^{n-1} - (-2)^{n-1}\right)}.$$
