ESPACES PRÉHILBERTIENS

1. Pour $X=(x,y,z)$ et $X'=(x',y',z')$ éléments de $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$(X|X')=xx'+12yy'+2zz'+3xy'+3x'y+xz'+x'z+2yz'+2y'z\,.$$

Prouver que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ (on éliminera tour à tour chaque variable en la mettant dans un terme au carré). Déterminer une base orthonormée pour ce produit scalaire.

---

2. Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$. Prouver que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $(P,Q)=\sum_{k=0}^{3}P(k)Q(k)$ et déterminer une base orthonormée de E.

---

3. Soit E l'espace des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Prouver que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $f:x\mapsto\cos x$ et $g:x\mapsto\cos 2x$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u:x\mapsto\sin^2 x$.

c. Vérifier que la famille $(c_n)_{n\geq 1}$ des fonctions définies par $c_n:x\mapsto\cos nx$ est orthonormale pour ce produit scalaire, et retrouver le lemme de Riemann-Lebesgue.

---

4. On considère un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et une fonction continue ω sur $[a,b]$ à valeurs strictement positives. On peut donc munir $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $(P,Q)=\int_a^b P(t)\,Q(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer l'existence d'une famille orthogonale (P_n) constituée de polynômes unitaires tels que $\forall n\in\mathbb{N},\ \deg P_n=n$.

b. Prouver que pour tout polynôme Q de degré strictement plus petit que n, on a $(Q,P_n)=0$.

c. Soit (Q_n) une autre suite de polynômes possédant les mêmes propriétés que la suite (P_n) de la question **a.**.
Prouver que l'on peut écrire $P_n=\alpha_nQ_n+\ldots+\alpha_1Q_1+\alpha_0Q_0$ avec $\alpha_0,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$.
Prouver grâce à la question **b.** que $\alpha_0=\ldots=\alpha_{n-1}=0$ et conclure.

d. On note $r_1,\ldots,r_p$ les racines *réelles* de P_n, *situées dans* $[a,b]$, et dont la multiplicité est *impaire* dans P_n. On pose $R(X)=\prod_{1\leq k\leq p}(X-r_k)$ (avec la convention que $R=1$ s'il n'y a pas de r_k).

Prouver que $(P_n,R)\neq 0$ et en déduire que P_n possède n racines réelles, toutes simples, et dans $[a,b]$.

---

5. Calculer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}}\int_0^{\pi}\left|t-(a\cos t+b\sin t)\right|^2\,\mathrm{d}t$.

---

6. **a.** Pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}\,({}^t AB)$. Prouver que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. On pose $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R} \right\}$. Justifier que C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c. Déterminer $C^\perp$ (au sens du produit scalaire défini à la question **a.**).

d. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $C^\perp$ puis calculer la distance de J à C.

e. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace F des matrices triangulaires supérieures.

7. Soient $x_1,\dots,x_p$ p vecteurs d'un espace préhilbertien E. On définit leur matrice de Gram par :

$$G(x_1,\dots,x_p) = \left((x_i \,|\, x_j) \right) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).$$

a. Prouver que si la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée, la matrice $G(x_1,\dots,x_p)$ est non inversible.

b. Inversement, en supposant la matrice $G(x_1,\dots,x_p)$ non inversible, prouver que la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée (on écrira une relation de dépendance linéaire des colonnes de cette matrice)

c. Que vaut le rang de la matrice de Gram $G(x_1,\dots,x_p)$?

8. Dans l'espace E des fonctions numériques continues sur $[0,1]$ muni du produit scalaire $\int_0^1 fg$, déterminer l'orthogonal du sous-espace $F = \{ f \in E \ / \ f(0) = 0 \}$.

9. Montrer que la norme n_∞ (sur l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$) n'est pas une norme euclidienne.

10.* On note $l^2(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles (u_n) telles que la série $\sum {u_n}^2$ converge, muni du produit scalaire :

$$(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \, .$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, on désigne par ε_p la suite dont tous les termes sont nuls, sauf celui d'indice p qui vaut 1.

Prouver que la famille $(\varepsilon_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est orthonormale et totale.

11.* Si $r = (r_n)$ désigne une suite de réels deux à deux distincts de $[0,1]$, on pose, pour f et g continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $(f,g)_r = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(r_n)g(r_n)}{2^n}$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur r pour que $(\ ,\ )_r$ soit un produit scalaire.

b. Prouver que si deux suites r et s de réels deux à deux distincts de $[0,1]$ vérifiant la condition de la question **a.** sont telles que $\forall\, p,q \in \mathbb{N},\ r_p \neq r_q$, alors les normes euclidiennes dérivant des produits scalaires $(\ ,\ )_r$ et $(\ ,\ )_s$ ne sont pas équivalentes.