L'outil principal de l'étude des séries, étude qui tient une place centrale dans le programme de Math-Spé MP, est la notion de *suites équivalentes*. La manipulation des équivalents, bien que simple et naturelle, est souvent mal maîtrisée pour des tas de raisons toutes moins valables les unes que les autres. La difficulté semble résider principalement dans le fait qu'il existe quelques interdits absolus dès lors que l'on manipule ces équivalents. Or qui dit interdit dit danger, peur du vide, vertige, et donc deux comportements possibles :

1. la fuite devant le danger (*« je préfère définitivement ne pas utiliser les équivalents parce que, à tous les coups, je vais dire des bêtises… »*).
2. l'attirance morbide : on évite généralement de dire des choses sur les équivalents, surtout si elles sont trivialement vraies, en revanche, à chaque fois qu'il y a une énorme couillonnade à dire, on tombe dedans à pieds joints.

L'objet de ce très modeste polycopié est de dédramatiser la notion en expliquant ce que sont des équivalents, à quoi ils correspondent d'un point de vue intuitif, ce que l'on peut en faire et pourquoi, ce que l'on ne peut pas en faire et pourquoi…

Plutôt qu'apprendre des règles par cœur, mon objectif est que vous compreniez pourquoi ces règles sont telles qu'elles sont, de sorte que vous puissiez à tout instant répondre de vous-même, de façon simple et sûre, à cette question cruciale : « *j'ai le droit de dire ça ?* ».

Un certain nombre de questions émaillent ce polycopié. Prenez le temps d'y réfléchir et d'y répondre… elles sont simples, mais essentielles. Tant que vous n'aurez pas la réponse, ou tant que vous ne saurez pas la trouver par vous-même, voire tant que votre réponse sera fausse, c'est que quelque chose d'essentiel n'aura pas été compris.

Ce polycopié se limitera à l'étude des équivalents dans le cadre restreint des suites réelles ou complexes. C'est amplement suffisant en vue de l'étude des séries.

I. Les définitions et propriétés générales.

Avant tout formalisme, définissons intuitivement le concept car c'est la clef de toute compréhension : *deux suites équivalentes sont deux suites qui ont exactement les mêmes ordres de grandeur à l'infini.* Une façon naturelle de traduire cela serait de demander à leur quotient de tendre vers 1, mais on s'expose ainsi à quelques difficultés dans le cas où ces suites peuvent s'annuler et c'est pourquoi ce n'est pas cette définition qui a été choisie.

Formalisons cela en deux temps :

> Définition 1 : étant données deux suites de complexes (u_n) et (v_n), on dit que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) (et on écrit $u_n = \mathrm{o}(v_n)$) si :
> $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

Bien entendu, il y a juste besoin de diviser par v_n pour voir, dans le cas où la suite (v_n) devient non nulle à partir d'un certain rang, que cette définition est parfaitement équivalente au fait que la suite (u_n/v_n) tende vers 0. C'est d'ailleurs ainsi qu'il faudra retenir ce qu'est un « o », même si la définition 1 est plus satisfaisante parce que plus générale.

Cela étant, c'est quoi « avoir exactement le même ordre de grandeur » ? En fait, la réponse est incluse dans la question ! Dire que deux objets ont le même ordre de grandeur, c'est dire que quand on les soustrait, on perd un ordre de grandeur ! Évident, non ? Alors allons-y :

> Définition 2 : étant données deux suites de complexes (u_n) et (v_n), on dit que (u_n) est *équivalente* à (v_n) (et on écrit $u_n \sim v_n$) si :
> $$u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n).$$

Là encore, quitte à diviser par v_n, il est facile de voir, dans le cas où la suite (v_n) devient non nulle à partir d'un certain rang, que cette définition est parfaitement équivalente au fait que la suite (u_n/v_n) tende vers 1, *et c'est ce qu'il faudra retenir* ! En revanche, dans le cas où la suite (v_n) peut s'annuler de temps en temps, alors on prouve facilement la propriété générale suivante qui n'est autre qu'un moyen détourné de dire que le quotient u_n / v_n tend vers 1, mais sans avoir besoin de diviser par v_n ... :

> Propriété 1 : deux suites de complexes (u_n) et (v_n) sont équivalentes si et seulement s'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que, au moins pour n assez grand, on ait :
> $$u_n = (1 + \varepsilon_n) v_n.$$

Alors, c'est si monstrueusement compliqué que ça les équivalents ?!

Question 1 : deux suites qui ont même limite sont-elles équivalentes ?

Question 2 : quel est l'équivalent le plus simple d'une suite de limite finie l ?

Question 3 : deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n - v_n \to 0$ sont-elles équivalentes ?

Question 4 : inversement, si deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, a-t-on $u_n - v_n \to 0$?

Question 5 : pourquoi est-il généralement considéré comme une horreur absolue d'écrire « $u_n \sim 0$ » ?

Question 6 : quand on dispose d'un développement limité de u_n à un certain ordre, comment peut-on obtenir un équivalent de u_n ?

Question 7 : les équivalents suivants sont-ils vrais, et y en a-t-il un qui soit plus précis que les autres ?
$$\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} \quad ; \quad \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} \quad ; \quad \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}.$$

Question 8 : comme résultat du développement limité d'une suite (u_n) dépendant d'un paramètre a, on trouve $u_n = \dfrac{a-2}{n} + \dfrac{a^2-1}{n^2} + \mathrm{o}(\dfrac{1}{n^2})$. Équivalent de u_n ?

Remarque : si l'on observe la définition de deux suites équivalentes ainsi que la réponse à la question 4, on comprend que si l'on remplace une suite (u_n) par une suite équivalente (v_n), on commet une faible erreur **relative**, mais pas nécessairement une faible erreur **absolue**.

II. Manipulation des équivalents.

1. Produits d'équivalents

Peut-on, dans un produit, remplacer une suite par une suite équivalente ? La réponse est évidente si l'on invoque l'équivalence énoncée dans la propriété 1 ! En effet :

si (u_n) et (v_n) sont deux suites de complexes équivalentes et si (w_n) est une troisième suite de complexes quelconque, alors on peut écrire $u_n = (1+\varepsilon_n)v_n$ avec (ε_n) tendant vers 0. Il vient alors $u_n w_n = (1+\varepsilon_n)v_n w_n$, et la réciproque de la propriété 1 permet d'affirmer que $(u_n w_n)$ et $(v_n w_n)$ sont équivalentes.

Propriété 2 : on peut faire des produits d'équivalents (ou encore « remplacer dans un produit une quantité par une quantité équivalente ») en ce sens que si $u_n \sim v_n$, alors $u_n w_n \sim v_n w_n$.

Exemple : Déterminer un équivalent le plus simple possible de $\left((1+\dfrac{1}{n})^2 + \cos\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{3/4} \sin\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^n+1}\right)\left(\sqrt{n^2+1} - \ln n\right)$.

2. Sommes d'équivalents

Tout le monde l'a entendu dire : « tu ne feras pas de sommes d'équivalents, c'est très vilain, interdit, beurk ! ». Alors, essayons de comprendre pourquoi et, en réalité, il suffit d'essayer de faire la démonstration pour voir immédiatement que ça coince complètement !

Plaçons-nous, pour bien voir les choses, dans le cas où l'on peut diviser, de sorte que des suites équivalentes sont des suites dont le quotient tend vers 1 :

j'ai $u_n \sim v_n$, ou encore $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$, et je veux savoir si $u_n + w_n \sim v_n + w_n$. Je dois donc évaluer le quotient $\dfrac{u_n + w_n}{v_n + w_n}$, et voir s'il tend vers 1… autant, s'il y avait un produit, ça marcherait tout seul après la simplification par w_n, autant ici la limite de ce quotient ne peut se calculer grâce au seul fait que $\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$!

Bon, d'accord, mais tout cela ne vaut pas un bon contre-exemple :

$n^2 + n \sim n^2 + 1$ … vrai ? Essayons de retrancher n^2, ça donne quoi ? Convaincus ?

Propriété 3 : on ne peut généralement pas sommer des équivalents.

Remarque : cela explique pourquoi, quand on écrit un équivalent, il est très souhaitable de n'écrire qu'un seul terme, le plus simple possible, plutôt qu'une somme de plusieurs termes laquelle inciterait à faire par la suite une différence d'équivalents. Je m'explique ; les équivalents qui suivent sont justes :

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} \quad ; \quad \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$$

mais si l'on n'y prend pas gare et que l'on fait la différence, on va écrire $\sin\dfrac{1}{n} - \ln(1+\dfrac{1}{n}) \sim -\dfrac{1}{6n^3}$, ce qui est faux (puisque cette différence est équivalente à $\dfrac{1}{2n^2}$ grâce à un développement limité). Pareille mésaventure ne serait pas arrivée en se contentant de l'équivalent, juste lui-aussi, $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ car dans ce cas, plus personne n'est tenté de faire la différence des équivalents $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ et $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, n'est-ce pas ?

Cela est d'ailleurs naturel puisque l'intérêt d'un équivalent est de donner, en première approximation, l'ordre de grandeur de u_n : un seul terme, le terme prépondérant, suffit pour cela…

3. Compositions d'équivalents

Peut-on composer des équivalents ? Plus précisément, si (u_n) et (v_n) sont deux suites de complexes équivalentes, et si h est une fonction définie sur un ensemble X contenant les u_n et les v_n, peut-on affirmer que les suites $(h(u_n))$ et $(h(v_n))$ sont équivalentes ?

Ici encore, il suffit de réfléchir un tout petit peu pour voir que tout plaide en faveur de la réponse NON !

Intuitivement, d'abord : la question est de savoir si, quand (u_n) et (v_n) ont le même ordre de grandeur, les deux suites $(h(u_n))$ et $(h(v_n))$ ont, elles-aussi, le même ordre de grandeur… il faudrait pour cela que h respecte les ordres de grandeur, ce qui n'est évidemment pas le cas de toute fonction !

Formellement ensuite, toujours dans le cas où l'on peut diviser (pour mieux voir les choses) :

j'ai $u_n \sim v_n$, ou encore $\frac{u_n}{v_n} \to 1$, et je veux savoir si $h(u_n) \sim h(v_n)$. Je dois donc évaluer le quotient $\frac{h(u_n)}{h(v_n)}$, et voir s'il tend vers 1… c'est exactement le même problème que pour les sommes, ici la limite de ce quotient ne peut se calculer grâce au seul fait que $\frac{u_n}{v_n} \to 1$!

Mais une fois encore, tout cela ne vaut pas un bon contre-exemple. Pour en construire un, l'idée est simple : l'exponentielle, par exemple, tend si vite vers l'infini en $+\infty$ que, selon toute vraisemblance, elle risque de ne pas respecter les ordres de grandeurs (en ce sens que deux suites proches relativement peuvent avoir des exponentielles très différentes) ; allons-y :

$n+1 \sim n$ (le quotient tend vers 1) mais on n'a pas $\mathrm{e}^{n+1} \sim \mathrm{e}^n$ (le quotient tend vers e).

> Propriété 4 : On ne doit pas composer des équivalents (et tout particulièrement, on ne doit pas exponentier des équivalents).

Remarque : attention, il y a beaucoup d'exponentielles qui se cachent ! Il ne faut pas oublier qu'un truc qui s'écrit ${u_n}^{v_n}$ n'est autre que $\mathrm{e}^{v_n \ln u_n}$. En conséquence, si dans ${u_n}^{v_n}$, vous remplacez u_n ou v_n par un équivalent, eh bien vous faites sans vous en rendre compte une exponentiation d'équivalent… une horreur !

4. En guise de conclusion

Rien ne remplace la pratique, bien entendu, mais j'espère vous avoir convaincus que tout cela n'est qu'une simple question de bon sens et qu'il est facile de répondre simplement et rapidement (comme je l'ai fait pour le problème de la composition) à la plupart des questions que l'on peut se poser. Exercez-vous donc avec les questions suivantes :

Question 9 : si $u_n \sim v_n$, a-t-on $|u_n| \sim |v_n|$, ${u_n}^\alpha \sim {v_n}^\alpha$, ${u_n}^n \sim {v_n}^n$, ${u_n}^{1/n} \sim {v_n}^{1/n}$?

Question 10 : peut-on faire des quotients d'équivalents ?

Question 11 (composition des équivalents par des logarithmes) : étant données deux suites équivalentes (u_n) et (v_n) de réels strictement positifs, a-t-on $\ln u_n \sim \ln v_n$ dans les cas suivants ?

i. les deux suites ont une limite finie autre que 0 et que 1 ;
ii. les deux suites tendent vers 0 ;
iii. les deux suites tendent vers 1 ;
iv. les deux suites tendent vers $+\infty$.

III. Les équivalents à connaître.

Les équivalents classiques suivants sont à connaître par cœur, *sans la moindre hésitation* !

$$\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$$
$$\mathrm{e}^u - 1 \underset{0}{\sim} u$$
$$\sin u \underset{0}{\sim} u$$
$$1 - \cos u \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}$$
$$\tan u \underset{0}{\sim} u$$

Par ailleurs, il ne faut pas oublier que l'outil numéro 1 pour obtenir des développements limités reste le théorème de Taylor-Young. Celui-ci permet d'obtenir des développements limités non classiques (par exemple celui d' arcsin au voisinage de $1/2$), et donc des équivalents. Ainsi, on dispose du résultat suivant, très souvent utile :

Propriété 5 : Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, définie au voisinage d'un réel a, de classe $\mathcal{C}^p$ sur ce voisinage. On suppose $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(p-1)}(a) = 0$ et $f^{(p)}(a) \neq 0$. Alors :

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) .$$

Exemple : Déterminer un équivalent de $\cos\frac{1}{x}$ au voisinage de $\frac{2}{\pi}$.