EXERCICE

Une urne contient une boule noire et $(n-1)$ boules blanches, n désignant un entier supérieur ou égal à 2.

On vide l'urne en effectuant des tirages d'une boule de la manière suivante : le premier tirage s'effectue sans remise, le second avec remise, le troisième sans remise, le quatrième avec remise, etc. D'une manière générale, les tirages d'ordre impair s'effectuent sans remise de la boule tirée et les tirages d'ordre pair avec remise.

On désigne par B_k l'évènement : « la boule noire est tirée au k-ième tirage » (que ce soit la première fois ou non), par A l'évènement « la boule noire n'a été tirée qu'une fois tout au long de l'épreuve », par N l'évènement « on tire n fois la boule noire ».

1. **a.** Quel est le nombre total N de tirages effectués avant que l'urne ne soit vide ?

b. Pour j élément de $\{1,\ldots,n-1\}$, combien reste-t-il de boules dans l'urne avant le $(2j)$-ième tirage ? Combien en reste-t-il avant le $(2j+1)$-ième tirage ?

2. **a.** Calculer $P(B_1)$ et $P(B_2)$.

b. Pour j élément de $\{1,\ldots,n-1\}$, calculer $P(B_{2j+1})$ et $P(B_{2j})$.

3. Pour j élément de $\{1,\ldots,n\}$, on note U_j l'évènement « on obtient la boule noire pour la première fois au $(2j-1)$-ième tirage ».

a. En considérant l'état de l'urne avant le $(2n-2)$-ième tirage, prouver que $P(U_n)=0$.

b. Prouver que $\forall j \in \{1,\ldots,n\}$, $P(U_j)=\dfrac{n-j}{n(n-1)}$.

c. Exprimer l'évènement A en fonction des U_j et en déduire la valeur de $P(A)$.

d. Calculer $P(N)$.

PROBLÈME

Partie I

Une matrice stochastique en probabilités

Deux personnages parfaitement imaginaires que, pour les besoins de la cause, nous nommerons par exemple Anaëlle (A) et Mickaël (M), décident de se lancer le défi suivant : le premier qui aura moins de la moyenne à une colle de physique sera déclaré perdant (ce qui n'empêche évidemment pas que les colles continuent ensuite). On convient que si, par exemple, tous les deux ont la moyenne à la première colle et moins de la moyenne à la seconde, alors les deux sont déclarés perdants. L'éventuel vainqueur, surtout s'il s'agit d'Anaëlle, se verra décerner une superbe récompense par leur professeur de mathématiques.

En plein accord avec les colleurs de physique, il a été décidé d'adopter le modèle suivant :

– la probabilité que A ait plus de 10 à une colle de physique est égale à $2/3$;
– la probabilité que M ait plus de 10 à une colle de physique est égale à $1/3$;
– les résultats des différentes colles sont indépendants les uns des autres ;

NB : les probabilités choisies ont été volontairement largement surévaluées afin de ne pas affecter le moral des intéressés.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

– AM_n : à l'issue de la *n*-ième colle, ni A ni M n'est encore perdant ;
– A_n : à l'issue de la *n*-ième colle, A a déjà gagné ;
– M_n : à l'issue de la *n*-ième colle, M a déjà gagné ;
– $\varnothing_n$: à l'issue de la *n*-ième colle, A et M sont perdants tous les deux.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n la matrice ligne dont les éléments sont les probabilités des 4 événements AM_n, A_n, B_n et $\varnothing_n$:

pour $n \geq 1$ $E_n = \begin{bmatrix} P(\mathrm{AM}_n) & P(\mathrm{A}_n) & P(\mathrm{M}_n) & P(\varnothing_n) \end{bmatrix}$ avec la convention naturelle $E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Par ailleurs, on considère la matrice $S \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante : $S = \begin{pmatrix} 2/9 & 4/9 & 1/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. **a.** Vérifier que $P_{\mathrm{AM}_n}(\mathrm{AM}_{n+1}) = \dfrac{2}{9}$ (on justifiera la réponse).

b. Calculer de même $P_{\mathrm{AM}_n}(\mathrm{A}_{n+1})$, $P_{\mathrm{AM}_n}(\mathrm{M}_{n+1})$ et $P_{\mathrm{AM}_n}(\varnothing_{n+1})$.

c. Rappeler la formule des probabilités totales.
En l'appliquant avec le système complet d'événements $(\mathrm{AM}_n, \mathrm{A}_n, \mathrm{M}_n, \varnothing_n)$, prouver que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ E_{n+1} = E_n S \text{, puis que } \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = E_0 S^n .$$

6. **a.** Préciser le spectre de la matrice S, et donner ses sous-espaces propres.

b. Prouver que S est diagonalisable.

c. On considère 3 réels x, y et z ainsi que la matrice P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Déterminer x, y et z de telle sorte que les vecteurs colonnes de P soient des vecteurs propres de S.

d. Vérifier que P est inversible, préciser la matrice $D = P^{-1}SP$ et expliciter P^{-1}.

7. On rappelle (?) que, quelle que soit la norme choisie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est convergente vers une matrice $X = (x_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ si et seulement si chaque suite de réels $(x_{i,j}{}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_{i,j}$ (bien sûr, $x_{i,j}{}^{(k)}$ désigne le terme en position *i-j* de la matrice X_k).

a. Déterminer la limite de la suite (D^n), et en déduire la limite de la suite (S^n).

b. En déduire la limite de la suite (E_n), puis la probabilité que A gagne. Déterminer de même la probabilité que B gagne.

Partie II

Étude des puissances des matrices stochastiques

On désigne par $\mathcal{ST}_n$ l'ensemble des matrices dites « stochastiques » de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- les n^2 coefficients de la matrice M sont des réels positifs ;
- la somme des termes de chaque ligne de M vaut 1 : $\forall\, i \in [[1,n]],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$.

Ces matrices stochastiques jouent un rôle important en théorie des Probabilités, comme le montre l'exemple de la matrice S rencontrée dans la partie **I** et dont il est trivial de vérifier qu'elle est stochastique.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et si $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose :

$$\left\|X\right\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left|x_i\right| \text{ et } \left\|A\right\| = \max_{1\le i,j\le n}\left|a_{i,j}\right|.$$

Par ailleurs, pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :

$$\ker A = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,/\, AX = 0\right\} \text{ et } \operatorname{Im} A = \left\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,/\, \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = Y\right\}.$$

On fixe dans toute cette partie une matrice stochastique $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{ST}_n$, et l'on pose :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ C_k = \frac{I_n + M + M^2 + \ldots + M^k}{k+1}.$$

8. **a.** Prouver que l'ensemble $\mathcal{ST}_n$ est stable pour le produit.

b. Prouver que la limite d'une suite convergente de matrices stochastiques est elle-même une matrice stochastique.

c. Démontrer que si la suite (M^k) converge vers une matrice L, alors L est une matrice de projection (on calculera de deux manières différentes la limite de la suite (M^{2k})).

d. Démontrer que si la suite (M^k) converge vers L, alors la suite (C_k) converge elle-aussi vers L.

9. **a.** On désigne par J le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées valent 1.

Calculer MJ. Que peut-on en déduire ?

b. Prouver que pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $\left\|MX\right\|_\infty \le \left\|X\right\|_\infty$.

En déduire que toutes les valeurs propres complexes de M sont de module inférieur ou égal à 1.

Quelles inégalités en déduit-on sur le déterminant et la trace de M ? Celles-ci peuvent-elles être réalisées ?

c. On considère une matrice colonne Y appartenant à $\operatorname{Im}(M - I_n)$ que l'on écrit $Y = MX - X$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Prouver que si $Y \in \ker(M - I_n)$, alors pour tout entier k on a $M^k X = kY + X$, puis que $\|Y\|_\infty \leq \frac{2}{k}\|X\|_\infty$.

d. En déduire que Y est nul, puis que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(M - I_n) \oplus \operatorname{Im}(M - I_n)$.

Dans toute la suite de cette partie, on convient de noter P la matrice de la projection sur $\ker(M - I_n)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(M - I_n)$.

10. **a.** On décompose un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur la somme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(M - I_n) \oplus \operatorname{Im}(M - I_n)$ en posant :

$$X = X_1 + X_2 \text{ avec } X_1 = PX \in \ker(M - I_n) \text{ et } X_2 = MZ - Z \in \operatorname{Im}(M - I_n).$$

Donner l'expression de $C_k X$ et montrer que $\|C_k X - PX\|_\infty \leq \frac{2\|Z\|_\infty}{k}$.

b. En déduire que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lim_{k\to\infty} C_k X = PX$, puis que $\lim_{k\to\infty} C_k = P$.

c. En déduire la limite de la suite (M^k) quand celle-ci est convergente.

11. On suppose que la matrice M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, de valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, avec l'hypothèse supplémentaire que, pour $i = 2, \dots, p$, les λ_i sont de module strictement inférieur à 1 (cette hypothèse est réalisée dès que les éléments diagonaux de la matrice M sont tous non nuls, mais on demande pas de prouver ce résultat ici).

a. Soit X un vecteur propre de M associé à une valeur propre $\lambda \neq 1$. Calculer $(M - I_n)X$ et en déduire l'inclusion $\ker(M - \lambda I_n) \subset \operatorname{Im}(M - I_n)$.

b. Prouver l'inclusion $\ker(M - \lambda_2 I_n) \oplus \dots \oplus \ker(M - \lambda_p I_n) \subset \operatorname{Im}(M - I_n)$, puis prouver que cette inclusion est une égalité.

c. On décompose un vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ comme somme de vecteurs propres : $X = X_1 + \dots + X_p$ avec, pour tout i, $X_i \in \ker(M - \lambda_i I_n)$.

Montrer que $X_1 = PX$, exprimer $M^k X - PX$ à l'aide de k, de $\lambda_2, \dots, \lambda_p$, de $X_2, \dots, X_p$, et en déduire que :

$$\lim_{k\to\infty} M^k = P.$$
