Exercice 1

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $M(a)$ suivante :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle inversible ?

2. Déterminer le polynôme caractéristique de $M(a)$ et le factoriser (*petite indication du trèèèès gentil M. Dupré : ce polynôme possède une racine pas très compliquée indépendante de* a).

3. Pour quelle(s) valeurs de a peut-on affirmer directement que :

i. $M(a)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;

ii. $M(a)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;

Quelles sont les deux valeurs de a pour lesquelles on ne peut conclure directement ?

4. On choisit $a = 4$.
Prouver que $M(4)$ est diagonalisable et la diagonaliser (on ne demande pas le calcul de P^{-1}).

5. On choisit $a = 1$.

a. Prouver que $M(1)$ n'est pas diagonalisable.

b. Trigonaliser $M(1)$ sous la forme $M(1) = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Calculer $M(1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

6. Étudier la diagonalisabilité de la matrice $M(a)$ pour l'autre valeur de a qui était ambiguë.

Exercice 2

On étudie dans cet exercice quelques propriétés des matrices réelles antisymétriques. On notera $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elles constituent.

On admettra qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7. On considère la matrice antisymétrique réelle suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique de M.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

b. Déterminer le rang de M ainsi que son polynôme minimal.

c. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base canonique.

Prouver que $\mathbb{R}^3 = \ker u \oplus \ker(u^2 + 9Id_{\mathbb{R}^3})$.

d. On considère un élément non nul e_1 de $\ker u$, et un élément non nul e_2 de $\ker(u^2 + 9Id_{\mathbb{R}^3})$. On pose par ailleurs $e_3 = \dfrac{u(e_2)}{3}$.

Prouver que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

e. En déduire que M est semblable à la matrice N suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

f. Soit R une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = N$.

i. Prouver que R et N commutent.

ii. En déduire que R est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}.$$

iii. Déterminer les deux valeurs de R qui conviennent.

g. Déterminer toutes les matrices S de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $S^2 = M$.

8. **a.** Rappeler la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, et en donner une base.

b. Prouver que si n est impair, un élément de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ n'est jamais inversible (penser au déterminant).

Ce résultat subsiste-t-il si n est pair ?

9. *Spectre des éléments de* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Soit A un élément de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ fixé. On considère une valeur propre λ de A (complexe *a priori*), et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

a. En calculant ${}^tX_0 A\overline{X_0}$ de deux manières différentes, prouver que λ est nul ou imaginaire pur.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Prouver que $\det(A) \geq 0$, et retrouver le résultat de la question **2.b.**.

10. *Éléments nilpotents de* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

On considère dans cette question une matrice antisymétrique A de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ que l'on suppose nilpotente.

a. Prouver que la matrice $S = A^{\mathrm{T}}A$ est nilpotente.

b. Prouver que S est diagonalisable et en déduire que S est nulle.

c. Exprimer $\mathrm{tr}(S)$ en fonction des coefficients de A et conclure.

11. *Diagonalisabilité d'un élément de* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ *en tant que matrice complexe.*

On se propose de prouver dans cette dernière question qu'une matrice A de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si on la voit comme matrice complexe.

On supposera que A est inversible (le résultat reste vari sans cette hypothèse, mais il nous manque quelques notions pour le prouver).

a. Quelle particularité de A^2 permet-elle d'affirmer que A^2 est diagonalisable ?

b. Soit π le polynôme minimal de A^2. Prouver que 0 n'est pas racine de π.

c. En déduire l'existence d'un polynôme complexe scindé-simple Q tel que $Q(A) = 0$ et conclure.

Exercice 3

On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$(*) : \ A^2 = -I_n \,, \ B^2 = -I_n \,, \ AB + BA = 0 \,.$$

12. Démontrer que n est pair.

13. On suppose ici que $n = 2$, et on note u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a. Prouver que u est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$, et que pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{R}^2$, la famille $(x, u(x))$ est libre.

b. En déduire que A est semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Trouver la forme générale des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $JM + MJ = 0$.

d. En déduire que, pour $n = 2$, il n'existe pas de matrices A et B vérifiant les relations (*).

14. On revient au cas général (c'est-à-dire n quelconque), et on choisit, en supposant qu'elles existent, deux matrices A et B vérifiant les relation (*).

a. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{H}$ engendré par les matrices I_n, A, B et AB est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Lorsque t, x, y et z sont des réels, calculer le produit :

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) \,.$$

c. En déduire que les quatre matrices I_n, A, B et AB forment une base de $\mathbb{H}$, et que $\mathbb{H}$ est un corps (non commutatif !).

15. On suppose dans toute la suite du problème que $n = 4$.

On définit alors par blocs les matrices A et B de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ par :

$$A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = AB \,,$$

où J est la matrice définie à la question **I.2.b.**.

a. Vérifier que les matrices A et B vérifient les conditions (*).

On notera $\mathbb{H}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par I_4, A, B et $C = AB$. Ses éléments sont appelés quaternions d'Hamilton.

b. Soit M une matrice non nulle de $\mathbb{H}$. Vérifier que ${}^tM$ est encore dans $\mathbb{H}$. Quel lien y a t-il entre M^{-1} et ${}^tM$?