Exercice 1

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $M(a)$ suivante :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle inversible ?

$\det M(a) = 2 - 2a$ *donc* $M(a)$ *est inversible si et seulement si* $a \neq 1$.

2. Déterminer le polynôme caractéristique de $M(a)$ et le factoriser.

Il doit être possible de trouver en un temps fini que $P_{M(a)} = (X-2)\big((X-1)^2 - a\big)$.

Pour a strictement négatif, on laisse ce polynôme sous cette forme et, pour a positif, on a :

$$P_{M(a)} = (X-2)(X-1-\sqrt{a})(X-1+\sqrt{a}).$$

3. Pour quelle(s) valeurs de a peut-on affirmer directement que :

i. $M(a)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;

Pour $a \geq 0$ *différent de* 0 *et de* 1, $P_{M(a)}$ *possède trois racines réelles distinctes,* $M(a)$ *est diagonalisable.*

ii. $M(a)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$;

Pour $a < 0$, $P_{M(a)}$ *n'est pas scindé dans* $\mathbb{R}$, $M(a)$ *n'est pas diagonalisable.*

Quelles sont les deux valeurs de a pour lesquelles on ne peut conclure directement ?

Pour a égal à 0 *ou* 1, *les racines de* $P_{M(a)}$ *sont réelles mais* $P_{M(a)}$ *possède une racine double, on ne peut rien affirmer directement.*

4. On choisit $a = 4$.

Prouver que $M(4)$ est diagonalisable et la diagonaliser (on ne demande pas le calcul de P^{-1}).

$P_{M(4)}$ *possède* 2, 3 *et* -1 *pour racines. Je vous laisse faire les calculs…*

5. On choisit $a = 1$.

a. Prouver que $M(1)$ n'est pas diagonalisable.

$$P_{M(1)} = X(X-2)^2 \text{ et } M(1)X = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2x \\ x + 2y = 2y \\ -y + z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}.$$

Ce calcul prouve que l'espace propre associé à la valeur propre 2 *de* $M(1)$ *est la droite engendrée par le vecteur* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $M(1)$ *n'est donc pas diagonalisable puisque* 2 *est valeur propre double.*

b. Trigonaliser $M(1)$ sous la forme $M(1)=PTP^{-1}$ avec $T=\begin{pmatrix}2&\alpha&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Choisissons pour e_1 *un vecteur propre associé à la valeur propre* 2 *(ici* $e_1=j-k$ *) et pour* e_3 *un vecteur propre associé à la valeur propre* 0 *(ici* $e_3=-2i+j+k$*). La forme de la matrice* T *conduit à chercher* e_2 *dans le noyau de* $(u-2Id)^2$*, non proportionnel à* e_1.

Or $(M(1)-2I_3)^2=\begin{pmatrix}2&-2&2\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ *et l'on voit donc que* $e_2=i+j$ *est dans le noyau de* $(u-2Id)^2$*. Reste à achever le calcul :*

$$u(e_1)=2e_1,\ u(e_3)=0 \text{ et } u(e_2)=i+j+i+2j-k=j-k+2(i+j)=e_1+2e_2.$$

La vérification du fait que la famille (e_1,e_2,e_3) *ne pose pas de problème,* ***mais vous avez trop tendance à l'oublier !*** *Finalement, on aura* $M(1)=PTP^{-1}$ avec :

$$T=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ et } P=\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

c. Calculer $M(1)^n$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Un calcul par blocs prouve facilement que $M(1)^n=PT^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2&\alpha\\0&2\end{pmatrix}^n&0\\0&0^n\end{pmatrix}$*. La suite est classique : on écrit* $\begin{pmatrix}2&\alpha\\0&2\end{pmatrix}=2I_2+\alpha N$*, on s'offre un petit coup de binôme en profitant au passage du fait que* $N^2=0$ *et on obtient* $\begin{pmatrix}2&\alpha\\0&2\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n&n\alpha 2^{n-1}\\0&2^n\end{pmatrix}$ *(j'ai gardé* α *pour ceux qui, du fait d'un autre choix des vecteurs de la base de trigonalisation, n'auraient pas obtenu* $\alpha=1$*).*

6. Étudier la diagonalisabilité de la matrice $M(a)$ pour l'autre valeur de a qui était ambiguë.

$P_{M(0)}=X(X-1)^2$ *et* $M(0)X=X\Leftrightarrow\begin{cases}x+z=x\\x+2y=y\\z=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=0\\x=-y\end{cases}$ *: là encore on trouve une droite pour une valeur propre double,* $M(0)$ *n'est pas diagonalisable.*

Exercice 2

On étudie dans cet exercice quelques propriétés des matrices réelles antisymétriques. On notera $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'elles constituent.

On admettra qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7. On considère la matrice antisymétrique réelle suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique de M.

$P_M = X(X^2+9)$.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

P_M possède des racines complexes non réelles, M n'est donc pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En revanche, M possède trois valeurs propres complexes distinctes, elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b. Déterminer le rang de M ainsi que son polynôme minimal.

0 étant valeur propre de M, M n'est pas inversible. Mais ses deux premières colonnes sont indépendantes, donc $\operatorname{rg} M = 2$.

En ce qui concerne le polynôme minimal, je dois reconnaître que ma question était ambiguë (mais bien peu d'entre vous l'ont vu !). Doit-on considérer M comme matrice réelle ou complexe ? (en fait c'est indifférent car on peut prouver que le polynôme minimal est indépendant du corps de base). Dans un premier temps, voyons M comme matrice réelle. Son polynôme minimal doit diviser $P_M = X(X^2+9)$ et posséder 0 comme racine puisque 0 est valeur propre de M. Comme $M \neq 0$, $\pi_M = X$ est exclu et il ne reste que $\pi_M = X(X^2+9)$ comme possibilité. Si M est considérée comme complexe, alors $\pi_M = X(X^2+9)$ puisque les racines de π_M sont les valeurs propres (complexes ici) de M.

c. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base canonique.

Prouver que $\mathbb{R}^3 = \ker u \oplus \ker(u^2 + 9Id_{\mathbb{R}^3})$.

Ce n'est rien d'autre que le théorème de Cayley-Hamilton conjugué au lemme des noyaux (X et X^2+9 sont premiers entre eux).

d. On considère un élément non nul e_1 de $\ker u$, et un élément non nul e_2 de $\ker(u^2+9Id_{\mathbb{R}^3})$. On pose par ailleurs $e_3 = \dfrac{u(e_2)}{3}$.

Prouver que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

On voit facilement, du fait de la localisation de e_2 dans $\ker(u^2+9Id_{\mathbb{R}^3})$, que $u(e_3) = -3e_2$ et que $e_3 \in \ker(u^2+9Id)$. Les deux vecteurs e_2 et e_3 sont donc dans $\ker(u^2+9Id_{\mathbb{R}^3})$. Or la restriction de u à $\ker(u^2+9Id_{\mathbb{R}^3})$ ne possède pas de valeur propre car une éventuelle valeur propre devrait vérifier $\lambda^2+9=0$; e_2 et e_3 sont donc indépendants car s'ils étaient liés, $u(e_2)$ serait proportionnel à e_2 et e_2 serait vecteur propre. Bref, (e_2,e_3) est une base de $\ker(u^2+9Id_{\mathbb{R}^3})$ et puisque $\mathbb{R}^3 = \ker u \oplus \ker(u^2+9Id_{\mathbb{R}^3})$, (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ (on aurait pu aussi faire les choses à la main en calculant explicitement e_1, e_2 et e_3).

e. En déduire que M est semblable à la matrice N suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce n'est autre que la matrice de u dans la base (e_1,e_2,e_3).

f. Soit R une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = N$.

i. Prouver que R et N commutent.

$RN = RR^2 = R^3 = R^2R = NR$ *(trop dur !).*

ii. En déduire que R est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}.$$

C'est un calcul sans malice. N'oubliez pas de raisonner par équivalence !

iii. Déterminer les deux valeurs de R qui conviennent.

Une racine carrée de N devant commuter avec N, elle se doit d'être de la forme précédente. On calcule alors R^2 *et on voit aisément que* $R^2 = N$ *si et seulement si* $a = 0,\ b = c = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

g. Déterminer toutes les matrices S de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $S^2 = M$.

$S^2 = M \Leftrightarrow S^2 = PNP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}S^2P = N \Leftrightarrow (P^{-1}SP)^2 = N$ *et on est ainsi ramené au cas précédent.*

8. **a.** Rappeler la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, et en donner une base.

$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ *et une base de* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ *est constituée des matrices antisymétriques « élémentaires » que sont les* $A_{i,j}$ *avec* $i < j$, *matrices dont le terme en position i-j vaut* 1, *celui en position j-i vaut* -1 *et tous les autres sont nuls.*

b. Prouver que si n est impair, un élément de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ n'est jamais inversible (penser au déterminant).

Ce résultat subsiste-t-il si n est pair ?

Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ A^{\mathrm{T}} = -A \Rightarrow \det A = \det A^{\mathrm{T}} = (-1)^n \det A$. *Cela assure bien évidemment que* $\det A = 0$ *si n est impair. En revanche, la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est antisymétrique mais inversible.*

9. *Spectre des éléments de* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Soit A un élément de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ fixé. On considère une valeur propre λ de A (complexe *a priori*), et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

a. En calculant $X_0^{\mathrm{T}} A \overline{X_0}$ de deux manières différentes, prouver que λ est nul ou imaginaire pur.

Le premier calcul va exploiter l'antisymétrie de A, le second sa réalité ($A = \overline{A}$ *) :*

$$X_0^{\mathrm{T}} A \overline{X_0} = X_0^{\mathrm{T}} \overline{AX_0} = X_0^{\mathrm{T}} \overline{\lambda X_0} = \overline{\lambda}\, X_0^{\mathrm{T}} \overline{X_0}\ ;$$

$$X_0^{\mathrm{T}} A \overline{X_0} = -X_0^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \overline{X_0} = -(AX_0)^{\mathrm{T}} \overline{X_0} = -\lambda\, X_0^{\mathrm{T}} \overline{X_0}.$$

Reste à constater que $X_0^{\mathrm{T}} \overline{X_0}$ *n'est pas nul puisque c'est la somme des modules au carré des coordonnées de* X_0 *et que celui-ci est non nul. Il vient donc bien* $\lambda = -\overline{\lambda}$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *son spectre doit être réel donc se réduire à* $\{0\}$. *Or, vous savez quoi ? Ben une matrice diagonalisable qui ne possède que* 0 *pour valeur propre, c'est la matrice nulle !*

c. Prouver que $\det(A) \geq 0$, et retrouver le résultat de la question **2.b.**.

$\det A$ *est le produit des valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité. En regroupant chaque valeur propre avec sa conjuguée et en isolant la valeur propre 0, on voit que* $\det A \geq 0$. *De plus, si n est impair, A doit avoir une valeur propre réelle qui ne peut être que 0, donc* $\det A = 0$.

10. *Éléments nilpotents de* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

On considère dans cette question une matrice antisymétrique A de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ que l'on suppose nilpotente.

a. Prouver que la matrice $S = A^{\mathrm{T}}A$ est nilpotente.

$S = -A^2$; la nilpotence de A entraine donc trivialement celle de S.

b. Prouver que S est diagonalisable et en déduire que S est nulle.

S est symétrique réelle (il fallait bien que le résultat admis en début de problème soit utilisé un jour, non ? en plus, j'ai appelé ma matrice S !), elle est donc diagonalisable. Par ailleurs, S est nilpotente donc ne possède que 0 comme valeur propre (X^n est polynôme annulateur de S). Une fois encore, on utilise cette trivialité qui est qu'un machin diagonalisable ne possédant que 0 comme valeur propre est nul.

c. Exprimer $\mathrm{tr}(S)$ en fonction des coefficients de A et conclure.

Un calcul élémentaire permet de voir que si $A = (a_{i,j})$, alors $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$ (ce calcul est général et n'utilise nullement l'antisymétrie de A). Ici, $S = 0 \Rightarrow \mathrm{tr}(S) = 0 \Rightarrow \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = 0 \Rightarrow \forall\, i, j,\ a_{i,j} = 0 \Rightarrow A = 0$. Bref, la seule matrice antisymétrique nilpotente est la matrice nulle.

11. *Diagonalisabilité d'un élément de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ en tant que matrice complexe.*

On se propose de prouver dans cette dernière question qu'une matrice A de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si on la voit comme matrice complexe.

On supposera que A est inversible (le résultat reste vari sans cette hypothèse, mais il nous manque quelques notions pour le prouver).

a. Quelle particularité de A^2 permet-elle d'affirmer que A^2 est diagonalisable ?

On voit facilement que A^2 est symétrique réelle.

b. Soit π le polynôme minimal de A^2. Prouver que 0 n'est pas racine de π.

A^2 étant inversible, 0 n'en est pas valeur propre ; or on sait que les valeurs propres sont racines du polynôme minimal.

c. En déduire l'existence d'un polynôme complexe scindé-simple Q tel que $Q(A) = 0$ et conclure.

A^2 étant diagonalisable, on peut écrire $\pi = (X - a_1)\ldots(X - a_p)$ avec des a_k deux à deux distincts. Pour $k = 1,\ldots,p$, on note r_k une des deux racines carrées de a_k. Les r_k sont deux à deux distincts puisque leurs carrés le sont, et $r_k \neq -r_k$ puisque 0 n'est pas racine de π. Alors :

$$(A^2 - a_1 I_n)\ldots(A^2 - a_p I_n) = 0 \Rightarrow (A - r_1 I_n)(A + r_1 I_n)\ldots(A - r_p I_n)(A + r_p I_n) = 0\,.$$

Finalement, le polynôme $Q = (X - r_1)(X + r_1)\ldots(X - r_p)\ldots(X + r_p)$ est annulateur de A et il est scindé-simple (dans $\mathbb{C}$!), A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3

On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$(*) :\ A^2 = -I_n\,,\ B^2 = -I_n\,,\ AB + BA = 0\,.$$

12. Démontrer que n est pair.

Dire que cette question n'a quasiment été trouvée par personne !!! $\det A^2 = (\det A)^2 = (-1)^n \Rightarrow n$ *est pair.*

13. On suppose ici que $n = 2$, et on note u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a. Prouver que u est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$, et que pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{R}^2$, la famille $(x, u(x))$ est libre.

$u \circ (-u) = Id_{\mathbb{R}^2}$ donc u est inversible. Le polynôme $X^2 + 1$ étant annulateur de u, les valeurs propres de u doivent vérifier $\lambda^2 + 1 = 0$, u ne possède donc pas de valeur propre (ne pas oublier que le corps de base est $\mathbb{R}$). Pas de valeur propre, pas de vecteur propre ! La famille $(x, u(x))$ est donc libre pour tout x non nul.

b. En déduire que A est semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On choisit x non nul. La famille $(x, u(x))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et, dans cette base, la matrice de u est J.

c. Trouver la forme générale des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $JM + MJ = 0$.

Tous calculs faits, ce sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

d. En déduire que, pour $n = 2$, il n'existe pas de matrices A et B vérifiant les relations (*).

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \neq -I_2$: les conditions $JM + MJ = 0$ et $M^2 = -I_2$ sont donc incompatibles dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Mais la condition $AB + BA = 0$ s'écrit $P^{-1}JPB + BP^{-1}JP = 0 \Leftrightarrow JPBP^{-1} + PBP^{-1}J = 0$ et la condition $B^2 = -I_2$ s'écrit $(PBP^{-1})^2 = -I_2$: la matrice PBP^{-1} ne peut donc exister (et donc A et B non plus !).

La fin de ce problème ne posant aucune difficulté mathématique particulière (c'est essentiellement du calcul) et pris que je suis par le temps, je vous laisse le soin de la chercher par vous-mêmes si le cœur vous en dit.