Toute une partie de ce problème est entièrement nouvelle. N'ayant pas été testée au préalable, il est possible qu'une ou deux fautes de frappes se soient glissées dans l'énoncé. En cas de doute, n'hésitez pas à m'appeler (ou à me faire appeler par David Denaro) au 06 26 82 42 18.

Bonne chance à tous !

Pour x réel élément de $]-1,1[$, et n entier naturel non nul, on pose :

$$u_n(x) = \ln(1 + x^n).$$

Étude sur $[0,1[$ de la série de fonctions $\sum u_n$

1. **a.** Prouver, pour tout réel positif u, les inégalités : $0 \leq \ln(1+u) \leq u$.

b. En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1[$, et que cette convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[0,a]$ avec $0 \leq a < 1$.

$$\textit{On pose désormais, pour } x \textit{ réel élément de } [0,1[\,,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + x^n).$$

2. **a.** Prouver que la fonction f ainsi définie est continue sur $[0,1[$.

b. Calculer $f(0)$, prouver que f est croissante sur $[0,1[$ et que $\forall\, x \in [0,1[,\ f(x) \leq \dfrac{x}{1-x}$.

b. Prouver que pour tout réel u élément de $[0,1[$, on a l'inégalité : $\ln(1+u) \geq \dfrac{u}{2}$.

c. En déduire une minoration de $f(x)$ par une fonction simple (ne comportant plus de signe Σ), puis la limite de f en 1^-.

3. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, et déterminer sa dérivée sur cet intervalle.

4. On fixe un réel x de l'intervalle $[0,1[$ et l'on pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $g(t) = \ln(1 + x^t)$. Par ailleurs, on définit une fonction h sur $]0,1]$ par $h(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u}$.

a. Prouver que h se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.

$$\textit{On posera désormais } \lambda = \int_0^1 h(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u.$$

b. Étudier la monotonie de la fonction g et en déduire, pour $N \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$\int_1^{N+1} \ln(1+x^t)\mathrm{d}t \le \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \le \int_0^{N} \ln(1+x^t)\mathrm{d}t \,.$$

c. Grâce au changement de variable $u = x^t$ dans les intégrales précédentes, en déduire l'encadrement :

$$\frac{-1}{\ln x}\int_0^x h(u)\mathrm{d}u \le f(x) \le \frac{-1}{\ln x}\int_0^1 h(u)\mathrm{d}u \,.$$

d. Donner un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de 1^-.

5. On se propose dans cette question de calculer la valeur de λ.

a. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction *f*.

Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a bien un sens et, en majorant la différence, prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \,.$$

b. En raisonnant sur les sommes partielles, prouver que si $\sum u_n$ est une série de fonctions numériques continues sur $[a,b]$ qui converge uniformément, alors on a le théorème d'intégration terme à terme suivant :

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t \,.$$

c. Rappeler le développement en série de $\ln(1+u)$ obtenu dans le cours ainsi, bien sûr, que son domaine de validité.

d. Prouver que pour $a \in [0,1[$, on a :

$$\int_0^a \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a^n}{n^2} \,.$$

e. En justifiant précisément le passage à la limite, prouver que $\displaystyle\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

f. On pose $\displaystyle S = \zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Prouver que $\lambda = \dfrac{1}{2}S$.

6. Cette question propose une méthode de calcul assez peu connue de $\zeta(2)$.

Pour les réfractaires à toute forme de calcul, sachez profiter du fait que l'énoncé vous fournit les résultats pour avancer dans la question, même si vous n'avez pas su les établir.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad Z_n = \int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t \,.$$

a. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}W_n$.

b. Prouver, par deux intégrations par parties successives, que pour tout $n \ge 1$ on a :

$$W_n = n\big((2n-1)Z_{n-1} - 2nZ_n\big) \,.$$

c. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = \dfrac{Z_n}{W_n}$. Prouver la relation suivante :

$$\forall n \geq 1,\ Q_{n-1} - Q_n = \frac{1}{2n^2}.$$

d. Justifier, pour tout x de $[0, \pi/2]$, l'inégalité $x \leq \dfrac{\pi}{2}\sin x$ et en déduire que :

$$\forall n \geq 1,\ Z_n \leq \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1}) \leq \frac{\pi^2}{4}\frac{W_n}{2n+2},$$

e. Déterminer la limite de la suite (Q_n) et en déduire la valeur de $\zeta(2)$, puis celle de λ.

Étude sur $]-1,0[$ de la série de fonctions $\sum u_n$

7. Prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1,0[$.

On pose désormais, pour x réel élément de $]-1,0[$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+x^n)$ et $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^{2n+1})$.

8. **a.** Prouver que pour tout x de $]-1,0[$, on a $g(x) = h(x) + f(x^2)$.

b. Prouver que la série de fonctions définissant $h(x)$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $]-a,0]$ avec $a \in [0,1[$.

c. Prouver que g est continue sur $]-1,0[$.

Une autre représentation de $f(x)$

On fixe un réel $x \in [0,1[$ et l'on définit sur $\mathbb{N}^*$ une suite de fonctions (F_n) en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ F_n(N) = \sum_{p=1}^{N} (-1)^{p-1}\frac{x^{np}}{p},$$

9. **a.** Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{N \to +\infty} F_n(N)$.

b. Prouver que $|F_n(N)| \leq -\ln(1-x^n)$.

c. En déduire la convergence normale (la variable étant N !) de la série de fonctions $\sum F_n$ sur $\mathbb{N}^*$.

10. Prouver que $f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{p-1}}{p}\dfrac{x^p}{1-x^p}$.
