Pour x réel élément de $]-1,1[$, et n entier naturel non nul, on pose :

$$u_n(x) = \ln(1+x^n).$$

Étude sur $[0,1[$ de la série de fonctions $\sum u_n$

1. **a.** Prouver, pour tout réel positif u, les inégalités : $0 \le \ln(1+u) \le u$.

La minoration est triviale. Pour la majoration, on a le choix entre l'étude de la fonction $u \mapsto u - \ln(1+u)$ *ou l'invocation d'une inégalité de concavité de* $\ln(1+u)$ *dont le graphe est sous sa tangente à l'origine.*

b. En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1[$, et que cette convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[0,a]$ avec $0 \le a < 1$.

La majoration $0 \le \ln(1+x^n) \le x^n$ *prouve à l'évidence la convergence de la série* $\sum u_n(x)$ *pour* $x \in [0,1[$ *puisque la série majorante est géométrique de raison x. De plus, pour* $x \in [0,a]$, $0 \le u_n(x) \le a^n$ *qui est le terme général d'une série convergente indépendadnte de x. On a ainsi prouvé la convergence normale, donc uniforme, de la série de fonctions* $\sum u_n$ sur $[0,a]$.

On pose désormais, pour x réel élément de $[0,1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+x^n)$.

2. **a.** Prouver que la fonction f ainsi définie est continue sur $[0,1[$.

Les fonctions u_n *que l'on somme sont continues sur* $[0,a]$, *segment sur lequel la série de fonctions* $\sum u_n$ *converge uniformément. La fonction f est donc continue sur* $[0,a]$ *et, cela étant vrai pour tout* $a \in [0,1[$ *, f est continue sur* $[0,1[$.

b. Calculer $f(0)$, prouver que f est croissante sur $[0,1[$ et que $\forall\, x \in [0,1[,\ f(x) \le \dfrac{x}{1-x}$.

$f(0)=0$ *puisque c'est la somme de la série nulle. Chaque fonction* u_k *étant croissante sur* $[0,1[$ *, on peut écrire, pour* $0 \le x \le y < 1$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *:* $\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \le \sum_{k=1}^{n} u_k(y)$. *Il reste à faire tendre n vers l'infini pour obtenir* $f(x) \le f(y)$. ***Le saviez-vous ?*** *Il est possible de prouver qu'une fonction est croissante sans pour autant la dériver !!! Enfin,* $\forall\, x \in [0,1[,\ f(x) \le \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$

b. Prouver que pour tout réel u élément de $[0,1[$, on a l'inégalité : $\ln(1+u) \ge \dfrac{u}{2}$.

Il y a juste à étudier la différence $u \mapsto \ln(1+u) - \dfrac{u}{2}$. *On remarquera que l'équivalent* $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ *prouve que l'inégalité demandée est vraie au voisinage de 0 mais ne dit nullement que ce voisinage s'étend à* $[0,1[$.

c. En déduire une minoration de $f(x)$ par une fonction simple (ne comportant plus de signe Σ), puis la limite de f en 1^- .

*Il résulte de la question **2.b.** que* $\forall x \in [0,1[,\ f(x) \geq \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{1-x} \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty$.

3. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, et déterminer sa dérivée sur cet intervalle.

Chaque fonction u_k *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1[$ *, intervalle sur lequel la série de fonctions* $\sum u_k$ *converge simplement. Soit alors* $[0,a]$ *un segment inclus dans* $[0,1[$ *. Pour* $x \in [0,a]$ *, on a :*

$$0 \leq u_n{}'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \leq na^{n-1} .$$

Mais la série $\sum na^{n-1}$ *est convergente (par d'Alembert ou bien en majorant* na^{n-1} *par* $1/n^2$ *pour n assez grand). La série dérivée converge donc uniformément sur tout segment inclus dans* $[0,1[$ *, ce qui permet de conclure que f est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1[$ *et que l'on peut la dériver terme à terme sur cet intervalle.*

4. On fixe un réel x de l'intervalle $[0,1[$ et l'on pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $g(t) = \ln(1+x^t)$. Par ailleurs, on définit une fonction h sur $]0,1]$ par $h(u) = \dfrac{\ln(1+u)}{u}$.

a. Prouver que h se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.

Il est infiniment classique que $\lim_{u\to 0} h(u) = 1$.

$$\textit{On posera désormais } \lambda = \int_0^1 h(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u .$$

b. Étudier la monotonie de la fonction g et en déduire, pour $N \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$\int_1^{N+1} \ln(1+x^t)\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \leq \int_0^N \ln(1+x^t)\mathrm{d}t .$$

La fonction g est trivialement décroissante puisque $0 \leq x < 1$ *et, une fois encore, pas besoin de la dériver pour s'en convaincre ! On fait alors un beau dessin et on obtient l'encadrement demandé par une hyper-classique comparaison avec une intégrale.*

c. Grâce au changement de variable $u = x^t$ dans les intégrales précédentes, en déduire l'encadrement :

$$\frac{-1}{\ln x}\int_0^x h(u)\mathrm{d}u \leq f(x) \leq \frac{-1}{\ln x}\int_0^1 h(u)\mathrm{d}u .$$

$$\int_0^N \ln(1+x^t)\mathrm{d}t \underset{u=x^t}{=} \int_1^{x^N} \ln(1+u)\frac{\mathrm{d}u}{u\ln x} \quad \textit{et} \quad \int_1^{N+1} \ln(1+x^t)\mathrm{d}t \underset{u=x^t}{=} \int_x^{x^{N+1}} \ln(1+u)\frac{\mathrm{d}u}{u\ln x} .$$

On remplace dans l'inégalité de la question précédente et on fait tendre N vers l'infini pour obtenir l'inégalité demandée.

d. Donner un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de 1^- .

Par continuité des intégrales fonctions de leur borne supérieure, on sait que $\displaystyle\int_0^x h(u)\mathrm{d}u \underset{x\to 1^-}{\to} \int_0^1 h(u)\mathrm{d}u$ *. On en déduit que* $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{-\lambda}{\ln x} \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\lambda}{1-x}$.

5. On se propose dans cette question de calculer la valeur de λ.

a. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction *f*.

Prouver que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a bien un sens et, en majorant la différence, prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Les f_n étant continues et convergeant uniformément vers f, la fonction f est continue et l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a donc bien un sens. Alors, $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \left|f(t)-f_n(t)\right|\mathrm{d}t \leq (b-a)\,n_\infty(f-f_n)\underset{+\infty}{\to}0$.

b. En raisonnant sur les sommes partielles, prouver que si $\sum u_n$ est une série de fonctions numériques continues sur $[a,b]$ qui converge uniformément, alors on a le théorème d'intégration terme à terme suivant :

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t\,.$$

On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. La suite (S_n) converge uniformément vers la fonction $t\mapsto\sum_{k=0}^{+\infty}u_k(t)$ donc, en appliquant à S_n le résultat de la question précédente, il vient :

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \lim_n\int_a^b S_n(t)\mathrm{d}t = \lim_n\int_a^b\sum_{k=0}^{n}u_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_n\sum_{k=0}^{n}\int_a^b u_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_a^b u_k(t)\mathrm{d}t\,.$$

c. Rappeler le développement en série de $\ln(1+u)$ obtenu dans le cours ainsi, bien sûr, que son domaine de validité.

$$\forall\, u\in\,]-1,1[,\ \ln(1+u)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}\,.$$

d. Prouver que pour $a\in[0,1[$, on a :

$$\int_0^a \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a^n}{n^2}\,.$$

Il y a juste à vérifier les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme établi à la question précédente :

$\dfrac{\ln(1+u)}{u}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{u^{n-1}}{n}$*, les fonctions que l'on somme sont continues sur $[0,a]$ et la convergence y est normale donc uniforme puisque* $\forall\, u\in[0,a],\ \left|(-1)^{n-1}\dfrac{u^{n-1}}{n}\right|\leq\dfrac{a^{n-1}}{n}\leq a^{n-1}$ *qui est le terme général d'une série géométrique convergente indépendante de x. Il vient donc :*

$$\int_0^a\frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u=\int_0^a\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{u^{n-1}}{n}\Big)\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^a\frac{u^{n-1}}{n}\,\mathrm{d}u=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a^n}{n^2}\,.$$

e. En justifiant précisément le passage à la limite, prouver que $\lambda=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Il s'agit de passer à la limite dans l'égalité précédente en utilisant le théorème dee sommation des limites. D'une part, par continuité des intégrales fonctions de leur borne supérieure, $\displaystyle\int_0^a \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u \underset{a\to 1^-}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

D'autre part, chaque fonction $v_n : a \mapsto (-1)^{n-1}\dfrac{a^n}{n^2}$ *a une limite finie en 1 égale à* $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$*, la convergence de* $\sum v_n$ *est uniforme car normale sur* $[0,1[$ *puisque* $\left|v_n(a)\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ *et enfin* $1 \in \overline{[0,1[}$.

f. On pose $S = \zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Prouver que $\lambda = \dfrac{1}{2} S$.

On calcule $S - \lambda$ *de manière à tuer les indices impairs et à doubler les indices pairs, ce qui donne* $S - \lambda = \dfrac{S}{2}$.

6. Cette question propose une méthode de calcul assez peu connue de $\zeta(2)$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad Z_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t .$$

a. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} W_n$.

$$\begin{aligned}
W_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+2} t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos t \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[\sin t \cos^{2n+1} t\Big]_0^{\pi/2} + (2n+1)\int_0^{\pi/2} \sin t \sin t \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t \\
&= (2n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t = (2n+1)(W_n - W_{n+1}).
\end{aligned}$$

b. Prouver, par deux intégrations par parties successives, que pour tout $n \ge 1$ on a :

$$W_n = n\big((2n-1)Z_{n-1} - 2nZ_n\big).$$

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[t\cos^{2n} t\Big]_0^{\pi/2} + 2n\int_0^{\pi/2} t \sin t \cos^{2n-1} t\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + 2n\left[\frac{t^2}{2}\sin t\cos^{2n-1} t\right]_0^{\pi/2} - 2n\int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{2}\big(\cos t\cos^{2n-1} t - (2n-1)\sin^2 t\cos^{2n-2} t\big)\,\mathrm{d}t \\
&= -n\int_0^{\pi/2} t^2\left(\cos^{2n} t - (2n-1)(1-\cos^2 t)\cos^{2n-2} t\right)\mathrm{d}t \\
&= n\big((2n-1)Z_{n-1} - 2nZ_n\big).
\end{aligned}$$

Je pense que le coté inhumain de ce calcul n'aura échappé à personne !!!

c. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = \dfrac{Z_n}{W_n}$. Prouver la relation suivante :

$$\forall\, n \geq 1,\ Q_{n-1} - Q_n = \frac{1}{2n^2}.$$

L'égalité précédente, si on la divise par W_n, donne :

$$\begin{aligned} 1 &= n\big((2n-1)\frac{Z_{n-1}}{W_n} - 2n\frac{Z_n}{W_n}\big) \\ &= n\big((2n-1)\frac{Z_{n-1}}{W_n} - 2nQ_n\big) \\ &= n\big(\frac{2n-1}{W_n}Z_{n-1} - 2nQ_n\big). \\ &= n\big(\frac{2n}{W_{n-1}}Z_{n-1} - 2nQ_n\big) \\ &= n\big(2nQ_{n-1} - 2nQ_n\big) \end{aligned}$$

Vous savez quoi ? La plupart d'entre vous se sont avérés incapables de réussir ce calcul !

d. Justifier, pour tout x de $[0, \pi/2]$, l'inégalité $x \leq \dfrac{\pi}{2}\sin x$ et en déduire que :

$$\forall\, n \geq 1,\ Z_n \leq \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1}) \leq \frac{\pi^2}{4}\frac{W_n}{2n+2},$$

L'inégalité $x \leq \dfrac{\pi}{2}\sin x$ s'obtient trivialement par une étude de fonction, ou en invoquant la concavité du sinus sur $[0, \pi/2]$ (courbe au-dessus de sa corde, c'est dans le cours).

Cela étant, il vient :

$$Z_n = \int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 t)\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1}) = \frac{\pi^2}{4}\frac{W_n}{2n+2}.$$

Pfff... que tout cela était difficile !

e. Déterminer la limite de la suite (Q_n) et en déduire la valeur de $\zeta(2)$, puis celle de λ.

$$0 \leq Q_n = \frac{Z_n}{W_n} \leq \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2n+2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il reste à sommer de 1 à N l'égalité de la question ***6.c.*** *et on obtient $Q_0 - Q_N = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}$. On fait maintenant tendre N vers l'infini et il vient, compte-tenu du fait que $Q_0 = \dfrac{Z_0}{W_0} = \dfrac{\pi^3/24}{\pi/2} = \dfrac{\pi^2}{12}$:*

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ puis } \lambda = \frac{\pi^2}{12}.$$

Étude sur $]-1, 0[$ de la série de fonctions $\sum u_n$

7. Prouver que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1, 0[$.

Pour $x \in]-1, 0]$, $\ln(1 + x^n) \sim x^n \leq 0$ ce qui assure la convergence de la série $\sum u_n(x)$.

On pose désormais, pour x réel élément de $]-1,0[$, $g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+x^n)$ et $h(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\ln(1+x^{2n+1})$.

8. **a.** Prouver que pour tout x de $]-1,0[$, on a $g(x)=h(x)+f(x^2)$.

Ultra dur !!! On casse $g(x)$ *en la somme des deux séries convergentes de ses termes pairs et impairs :*

$$g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+x^n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+x^{2n})+\sum_{n=0}^{+\infty}\ln(1+x^{2n+1})=f(x^2)+h(x).$$

b. Prouver que la série de fonctions définissant $h(x)$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $]-a,0]$ avec $a\in[0,1[$.

La seule difficulté réside dans le fait que les quantités manipulées étant négatives, il faut prendre soin dans les inégalités.

$$\ln(1+a^{2n+1})\le\ln(1+x^{2n+1})\le 0\Rightarrow\left|\ln(1+x^{2n+1})\right|\le-\ln(1+a^{2n+1})\sim -a^{2n+1}.$$

c. Prouver que g est continue sur $]-1,0[$.

La question précédente prouve la continuité de h sur tout intervalle de la forme $]-a,0]$ *avec* $a\in[0,1[$ *, donc sur* $]-1,0[$ *. La fonction f étant elle-même continue, la question* ***8.a.*** *donne sans douleur la continuité de g sur* $]-1,0[$.

Une autre représentation de *f*(*x*)

On fixe un réel $x\in[0,1[$ et l'on définit sur $\mathbb{N}^*$ une suite de fonctions (F_n) en posant :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall N\in\mathbb{N}^*,\ F_n(N)=\sum_{p=1}^{N}(-1)^{p-1}\frac{x^{np}}{p},$$

9. **a.** Déterminer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim_{N\to+\infty}F_n(N)$.

Comme $0\le x^n<1$ *, la somme de la série* $\sum(-1)^{p-1}\frac{x^{np}}{p}$ *est* $\ln(1+x^n)$.

Par suite, $\lim_{N\to+\infty}F_n(N)=\ln(1+x^n)$

b. Prouver que $\left|F_n(N)\right|\le-\ln(1-x^n)$.

$$\left|F_n(N)\right|=\left|\sum_{p=1}^{N}(-1)^{p-1}\frac{x^{np}}{p}\right|\le\sum_{p=1}^{N}\frac{x^{np}}{p}\le\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^{np}}{p}=-\ln(1-x^n)$$

c. En déduire la convergence normale (la variable étant N !) de la série de fonctions $\sum F_n$ sur $\mathbb{N}^*$.

Puisque $-\ln(1-x^n)\sim x^n\ge 0$ *, on a majoré* $\left|F_n(N)\right|$ *par le terme général d'une série convergente indépendadnte de N ; c'est la convergence normale demandée.*

10. Prouver que $f(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\frac{x^p}{1-x^p}$.

D'une part, il vient par sommation des limites et grâce à la convergence normale établie à la question précédente :

$$\lim_N \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_N F_n(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+x^n) = f(x)\,.$$

Mais, d'autre part, puisque l'on somme un nombre <u>*fini*</u> *de séries convergentes, on a :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(N) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{N} (-1)^{p-1}\,\frac{x^{np}}{p} = \sum_{p=1}^{N}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{p-1}\,\frac{x^{np}}{p} = \sum_{p=1}^{N} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \sum_{n=1}^{+\infty} x^{np} = \sum_{p=1}^{N} \frac{(-1)^{p-1}}{p}\,\frac{x^p}{1-x^p}\,.$$

On fait tendre N vers l'infini dans cette dernière égalité et le tour est joué.

Youpi et tralala.