COURS

1. Citer sans démonstration les résultats suivants :

a. Inégalité de Taylor-Lagrange.

b. Théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$.

c. Inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales.

d. Diverses caractérisations des fonctions numériques convexes sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

EXERCICE

On dit qu'une fonction *f*, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est *absolument monotone* sur I si *f* est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur *I*, et si *f* ainsi que ses dérivées de tous ordres sont positives sur I :

f est absolument monotone (on pourra noter $f >> 0$) sur $I \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) \geq 0$.

2. Soient f et g deux fonctions absolument monotones sur *I*. Prouver que $f+g$ et fg sont absolument monotones sur *I*.

3. **a.** Prouver que la fonction tangente est absolument monotone sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$ (on pourra prouver par récurrence que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction tangente s'écrit $P_n(\tan)$ où P_n est un polynôme réel à coefficients positifs).

b. Prouver que si f est absolument monotone sur *I*, il en va de même de e^f (on pourra établir par récurrence la forme de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de e^f).

4. On suppose que *f* est une fonction absolument monotone sur $I =]a,b[$ avec a <u>fini</u>.

a. Prouver que *f* possède une limite finie en a ; dans la suite de cette question, on prolonge *f* par continuité en a, et pour des raisons de commodité, on note encore *f* la fonction ainsi prolongée sur $[a,b[$.

b. Prouver que *f* est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b[$.

c. Prouver plus généralement que *f* est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b[$.

d. On suppose b fini. Un phénomène analogue se produit-il en b ?

5. Soit *f* une fonction absolument monotone sur un intervalle $[0,A[$ (A étant un réel strictement positif). On se propose dans cette question de prouver que *f* est somme de sa série de Taylor sur cet intervalle, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall x \in [0,A[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

a. Prouver que pour tout x de $[0,A[$ et pour tout entier n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leq f(x) .$$

En déduire que la série $\sum \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est convergente.

b. On fixe un réel x dans $[0, A[$, et on envisage un réel B vérifiant $x < B < A$.

i. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0, B[,\ f^{(n)}(t) \leq n! \dfrac{f(B)}{(B-t)^n}$.

ii. Étudier sommairement les variations de la fonction h définie sur $[0, x]$ par $h(t) = \dfrac{x-t}{B-t}$.

iii. En déduire une majoration du reste intégrale dans la formule de Taylor écrite à l'ordre n entre 0 et x.

iv. Prouver que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

PROBLÈME

On désigne par C l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout élément f de C et tout entier positif n, on pose :

$$I_n(f) = \int_0^1 t^n f(t) \mathrm{d}t .$$

L'intégrale $I_n(f)$ s'appelle « le moment d'ordre n » de f.

Les diverses parties constituant ce problème sont indépendantes les unes des autres. Seule la question **9.** *de la partie* **II** *est directement utilisée dans la suite mais il est annoncé au début de cette question ce qui va y être prouvé.*

I. Un peu d'algèbre

6. **a.** Prouver l'existence d'un unique polynôme unitaire P_1 de degré 1 tel que $I_0(P_1) = 0$ (on explicitera ce polynôme).

b. Prouver de même l'existence d'un unique polynôme unitaire de degré 2 (que l'on explicitera) tel que $I_0(P_2) = I_1(P_2) = 0$.

7. On considère la suite des *polynômes de Legendre* $L_n = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}[(X^2 - X)^n]$.

a. Calculer L_0 , L_1 et L_2 .

b. Déterminer le degré de L_n ainsi que son coefficient dominant.

c. Prouver que pour tout entier $p < n$, 0 et 1 sont racines du polynôme $\dfrac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}X^p}[(X^2 - X)^n]$.

d. En déduire, par des intégrations par parties successives, que $I_k(L_n) = 0$ pour tout entier $k < n$.

II. Étude de la suite $(I_n(f))$

On fixe ici un élément f de C.

8. Majorer $|I_n(f)|$ en fonction de n et de $\|f\| = \sup\limits_{0 \le t \le 1} |f(t)|$, et en déduire la limite de la suite $(I_n(f))$.

9. On souhaite établir que $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n(f) = f(1)$.

N.B : ce résultat un peu plus délicat sera utile dans la suite, alors le garder à l'esprit même si l'on n'a pas su le prouver !

a. Soit α un élément de $]0,1[$. Prouver par une majoration simple que $\lim\limits_{n \to +\infty} n\int_0^\alpha t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$.

b. On suppose dans cette question que $f(1) = 0$. Prouver, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un réel η élément de $]0,1[$ tel que, pour tout entier positif n, on ait :

$$\left| n\int_\eta^1 t^n f(t)\mathrm{d}t \right| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

En déduire proprement que $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n(f) = 0$.

c. Conclure dans le cas général, c'est-à-dire quand on ne suppose plus que $f(1) = 0$.

III. Étude de la série $\sum (-1)^n I_n(f)$

On fixe encore ici un élément f de C.

10. On suppose *dans cette seule question* que f est une fonction positive sur $[0,1]$. Prouver alors que la série $\sum (-1)^n I_n(f)$ est convergente.

11. f désignant à nouveau un élément quelconque de C, montrer en utilisant l'identité bien connue (?) :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t}$$

que la série $\sum (-1)^n I_n(f)$ est convergente et que l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\mathrm{d}t.$$

12. Quelle formule (sans intégrale !) obtient-on en appliquant le résultat précédent à la fonction $f(t) = \sqrt{t}$?

IV. Étude de la série $\sum I_n(f)$

13. On désigne par f un élément quelconque de C. Donner une condition nécessaire portant sur $f(1)$ pour que la série $\sum I_n(f)$ soit convergente (ne pas oublier le début du problème !).

On suppose dans la suite de cette partie que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

14. Donner une relation simple reliant, pour tout entier n, les nombres $I_n(f)$ et $I_{n+1}(f')$. En déduire que la condition nécessaire trouvée à la question précédente est aussi suffisante.

On suppose dans toute la suite de cette partie que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $f(1)=0$.

15. **a.** Prouver que la fonction g définie sur $[0,1[$ par $g(t)=\dfrac{f(t)}{1-t}$ possède une limite finie quand t tend vers 1^- que l'on déterminera. On peut alors prolonger g par continuité à $[0,1]$, et ce prolongement sera encore noté g.

b. Prouver que si f est supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Que vaut $g'(1)$?

16. Prouver que pour tout t de $[0,1]$ et tout entier n, on a :

$$g(t)=f(t)+tf(t)+\ldots+t^n f(t)+t^{n+1}g(t).$$

En déduire la somme de la série $\sum I_n(f)$.

V. Étude de la série $\sum [I_n(f)]^2$

On fixe un élément f de C.

17. Prouver, grâce aux résultats de la partie **II.**, que la série $\sum [I_n(f)]^2$ est convergente.

On se propose dans la suite de cette partie de majorer la somme de cette série.

18. P étant un polynôme à coefficients réels, vérifier l'égalité :

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_0^{\pi} P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta=0.$$

(attention, cuidado, be carefull, achtung !!!)

19. Établir alors, en remarquant que $\left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2=P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})P(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$, les inégalités :

$$\int_0^1 [P(x)]^2\,\mathrm{d}x\le\int_{-1}^{1}[P(x)]^2\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2\mathrm{d}\theta.$$

20. En déduire que pour toute famille $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ de $n+1$ réels, on a :

$$0\le\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\frac{a_k a_l}{k+l+1}\le\pi\sum_{k=0}^{n}{a_k}^2.$$

21. À l'aide de la question précédente, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux fonctions f et h, où h est définie par $h(t)=\sum_{k=0}^{n} I_k(f)t^k$, prouver l'inégalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}[I_n(f)]^2\le\pi\int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$