COURS

1. Énoncer (sans démonstration, sauf pour la **d.**) les résultats suivants :

a. Règle de comparaison pour la convergence de deux séries dont les termes généraux sont équivalents.

b. Règle de d'Alembert.

c. Théorème des séries alternées.

d. Étude des séries de Bertrand $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln^3 n}$ et $\sum \frac{\ln^3 n}{n^{3/2}}$.

EXERCICE

On pose, pour tout entier positif n, $a_n = 2\frac{4^n(n!)^2}{(2n+2)!}$.

Soit la série $\sum 2\frac{4^n(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2}$ où x désigne une variable réelle.

2. Calculer le quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, et en déduire que la série $\sum 2\frac{4^n(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2}$ converge pour $|x|<1$ et diverge pour $|x|>1$.

3. **a.** Effectuer le développement limité à l'ordre 1 de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

b. On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ et $w_n = \frac{1}{n^{5/4}}$.

Prouver, pour n assez grand, la double inégalité :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n}.$$

c. En déduire l'existence de deux constantes strictement positives α et β (que l'on ne cherchera pas à expliciter) telles que, pour n assez grand, on ait :

$$\alpha v_n \leq a_n \leq \beta w_n.$$

d. Qu'en déduire concernant la convergence de la série $\sum a_n$?

4. Étudier la série $\sum a_n$ par une méthode directe, autre que celle proposée à la question **3.**

On admettra que pour tout x de $[-1,1]$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{4^n(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2} = (\arcsin x)^2$.

5. **a.** Déterminer la somme des séries $\sum \frac{a_n}{4^n}$ et $\sum a_n$.

b. On pose, pour tout entier n, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{4^k}$.

Prouver pour tout n l'inégalité $0 \leq R_n \leq \frac{1}{3.4^n}$.

c. On pose, pour tout entier n, $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Prouver, pour n assez grand, l'inégalité $r_n \geq \frac{\alpha}{n+1}$ (le réel est défini dans la question **3.c.**).

d. Commenter les résultats obtenus aux questions **5.b.** et **5.c.**.

PROBLÈME

I. Le théorème du point fixe dans le cas réel.

On considère (dans les questions **6.** et **7.**) une fonction continue f de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On choisit u_0 dans $[0,1]$, et on construit par récurrence une suite (u_n) en posant, pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. **a.** Prouver que la suite (u_n) est bien définie.

b. Prouver, grâce à la fonction $g : x \mapsto x - f(x)$, que la fonction f possède au moins un point fixe (c'est à dire un élément α de $[0,1]$ qui vérifie $f(\alpha) = \alpha$).

7. On suppose dans cette question que f est contractante, c'est à dire :

$$\exists k \in [0,1[\text{ tel que } \forall x, y \in [0,1], \left|f(x) - f(y)\right| \leq k\left|x - y\right|.$$

a. Prouver que le point fixe de f (qui existe d'après **6.b.**) est unique. On le note α.

b. Prouver que la suite (u_n) converge vers α.

c. Comment, en pratique, justifie-t-on généralement qu'une fonction est contractante ?

II. Le théorème du point fixe dans le cas complexe.

Soit maintenant une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\exists k \in [0,1[\text{ tel que } \forall x, y \in \mathbb{C}, \left|f(x) - f(y)\right| \leq k\left|x - y\right|.$$

On construit une suite (v_n) en choisissant v_0 dans $\mathbb{C}$ et en posant pour tout entier n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

8. **a.** Donner une majoration de $\left|v_{n+1} - v_n\right|$ en fonction de $\left|v_1 - v_0\right|$. Qu'en déduire concernant la série $\sum \left|v_{n+1} - v_n\right|$?

b. Prouver que la suite (v_n) converge.

c. Prouver que la fonction f possède un point fixe (dont on peut prouver qu'il est unique de la même façon qu'à la question **7.a.**).

III. La méthode de Newton.

On se donne une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un segment de la forme $J = [\alpha - r, \alpha + r]$, à valeurs réelles, vérifiant :

$$f(\alpha) = 0 \ ; \ \forall x \in J, \left|f'(x)\right| \geq m > 0 \ \text{ et } \ \left|f''(x)\right| \leq M \ .$$

On suppose enfin réalisée la condition :

$$\frac{Mr}{2m} = k < 1 \, .$$

Pour déterminer une valeur approchée de α, Newton suggère de choisir un point b de J, et de prendre comme valeur approchée de α l'abscisse du point d'intersection avec l'axe Ox de la tangente à la courbe représentative de f issue du point de coordonnées $(b, f(b))$.

À titre tout à fait exceptionnel, je rappelle gracieusement l'inégalité de Taylor-Lagrange :
si g est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si $\forall x \in I, \left|g''(x)\right| \leq A$, alors :

$$\forall a, b \in I, \left|g(b) - g(a) - g'(a)(b-a)\right| \leq A \frac{(b-a)^2}{2} \, .$$

9. **a.** Prouver que, sous les hypothèses choisies, α est le seul zéro de f dans J.

On choisit désormais un point b de J.

b. Faire un schéma et donner, en fonction de b, la valeur approchée b' de α suggérée par Newton.

c. Prouver, en n'oubliant pas que $f(\alpha) = 0$, l'inégalité :

$$\left|b' - \alpha\right| \leq \frac{M}{2m} \left|b - \alpha\right|^2 \, .$$

En déduire que $b' \in J$.

10. On construit désormais une suite (b_n) en posant :

$$b_0 = b \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \, b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)} \, .$$

a. Prouver que la suite (b_n) est entièrement définie et que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|b_n - \alpha\right| \leq \left(\frac{M}{2m}\right)^{2^n - 1} \left|b_0 - \alpha\right|^{2^n} \leq \frac{2m}{M} k^{2^n} \, .$$

b. Que faut-il en penser ?

11. On choisit ici $f(x) = x^3 + x - 1$.

a. Prouver que f s'annule en un point unique α de $[0,1]$, avec $0{,}6 \leq \alpha \leq 0{,}7$.

b. On choisit $b = 0{,}7$, et $r = 0{,}1$, de sorte que $[\alpha - r, \alpha + r] \subset [0{,}5 ; 0{,}8]$.

Prouver que les valeurs $m = 7/4$ et $M = 5$ conviennent, et donner la valeur de k correspondante.

c. Expliciter la suite (b_n) suggérée par la méthode de Newton pour converger vers α, et majorer $\left|b_n - \alpha\right|$.

IV. Points fixes répulsifs.

On considère ici une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans lui-même, et un élément α de I tel que :

$$f(\alpha) = \alpha \ \text{ et } \ \left|f'(\alpha)\right| > 1 \, .$$

On construit par récurrence une suite (u_n) d'éléments de I en choisissant $u_0 \in I$ et en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = f(u_n)\,.$$

10. Que peut-on dire de la suite (u_n) s'il existe un entier p tel que $u_p = \alpha$?

11. On suppose ici que $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \neq \alpha$ mais que, néanmoins, la suite (u_n) converge vers α. On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = \frac{|u_{n+1} - \alpha|}{|u_n - \alpha|}\,.$$

a. Déterminer la limite de la suite (v_n).

b. Que peut-on en déduire concernant la suite $(|u_n - \alpha|)$? Conclure à une impossibilité.

c. Récapituler en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (u_n) converge vers α.

12. On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = \pi$ et la formule de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = \frac{{u_n}^3 + 4}{u_n\,(4u_n + 1)}\,.$$

On admettra (pas les 5/2 pour qui ce sera la dernière question de ce DS) que la suite (u_n) ainsi définie ne prend jamais la valeur 1.

a. Prouver que la suite (u_n) est entièrement définie.

b. On suppose dans cette question que la suite (u_n) tend vers $+\infty$. En envisageant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, conclure à une impossibilité.

c. Déterminer la seule limite finie possible pour la suite (u_n) et prouver que celle-ci ne convient pas.

d. *Pour les 5/2* : justifier que la suite (u_n) ne prend effectivement jamais la valeur 1.

This is the end
Beautiful friend
This is the end
My only friend, the end...