Un peu de cours

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses *en argumentant vos réponses* (par un résultat du cours ou par un contre-exemple) :

0. **a.** Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

b. Si la série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R converge pour $z = 1$, alors $R > 1$.

c. Si la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R, alors $\dfrac{1}{R} = \lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

d. Si $|a_n| \le n^3$ pour n assez grand, alors la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \ge 1$.

e. Une série entière converge uniformément sur son disque ouvert de convergence.

f. Une fonction peut être de classe $\mathcal{C}^\infty$ sans pour autant être développable en série entière.

g. La série produit de Cauchy de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$. Son rayon de convergence est plus grand que le plus petit des rayons de convergence des séries de départ.

h. La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t} \arctan t \, dt$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

PROBLÈME

L'objet de ce problème est de prouver de quatre façons essentiellement différentes que la fonction tangente est somme de sa série de Taylor au voisinage de 0. Seule la partie IV explicite ce développement. Les quatre parties de ce problème sont donc totalement indépendantes.

Préliminaires

1. Soit $Q = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme réel de degré n à coefficients *positifs*.
Prouver que $\forall t \in [-1,1], \quad |Q(t)| \le Q(1)$ et $|Q'(t)| \le nQ(1)$.

2. **a.** Prouver, pour tout entier p, l'existence d'un polynôme réel P_p tel que :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \quad \tan^{(p)} x = P_p(\tan x).$$

b. Prouver qu'un tel polynôme P_p est unique.

c. Donner une formule de récurrence liant P_{p+1} et P_p.
En déduire le degré de P_p et le fait que ses coefficients sont positifs.

3. **a.** Prouver que $0 \le P_{p+1}(1) \le 2(p+1)P_p(1)$.
En déduire une majoration de $P_p(1)$ valable pour tout entier p.

b. Prouver que $\forall x \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[,\quad \left|\tan^{(p)} x\right| = \left|P_p(\tan x)\right| \leq 2^p\, p!$.

Partie I

On dit qu'une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est *absolument monotone* sur I si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, et si f ainsi que ses dérivées de tout ordre sont positives sur I :

f est absolument monotone (on pourra noter $f >> 0$) sur $I \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) \geq 0$.

4. Soient f et g deux fonctions absolument monotones sur I. Prouver que $f+g$ et fg sont absolument monotones sur I.

5. **a.** Pour quelles valeurs du réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est-elle absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$?

b. Prouver grâce aux préliminaires que la fonction tangente est absolument monotone sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

6. Soit f une fonction absolument monotone sur un intervalle $[0,A[$ (A étant un réel strictement positif). On se propose dans cette question de prouver que f est somme de sa série de Taylor sur cet intervalle, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall x \in [0,A[,\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n .$$

a. Prouver que pour tout x de $[0,A[$ et pour tout entier n, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leq f(x)$.

En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est convergente.

b. On fixe un réel x dans $[0,A[$, et on envisage un réel B vérifiant $x < B < A$.

i. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,B[,\ f^{(n)}(t) \leq n!\dfrac{f(B)}{(B-t)^n}$.

ii. Étudier sommairement les variations de la fonction h définie sur $[0,x]$ par : $h(t) = \dfrac{x-t}{B-t}$.

iii. En déduire une majoration du reste intégrale dans la formule de Taylor écrite à l'ordre n entre 0 et x.

iv. Prouver que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

7. Prouver que la fonction tangente est somme de sa série de Taylor sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Partie II

On établit dans cette partie une condition nécessaire et suffisante (portant sur l'ordre de grandeur de ses dérivées successives) pour qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ soit développable en série entière.

8. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-\alpha,\alpha[$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose l'existence de deux constantes A et k telles que :

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leq Ak^n n!.$$

Prouver, grâce à une formule de Taylor, que f est développable en série entière autour de 0, et expliciter un intervalle sur lequel f est somme de sa série de Taylor.

9. Prouver, grâce aux préliminaires, que la fonction tangente est développable en série entière sur un intervalle que l'on précisera.

10. Réciproquement, on se donne une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul, et on désigne par $f(x)$ sa somme pour x élément de $]-R,R[$. Soit r un élément de $]0,R[$, et α un réel vérifiant $0 \leq \alpha < r$.

a. Prouver que la suite $(a_n r^n)$ est bornée ; on notera $M = \sup\limits_n \left|a_n r^n\right|$.

b. Quelle formule obtient-on en dérivant à un ordre $p \in \mathbb{N}$ le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x}$?

c. Prouver que pour tout x de $[-\alpha,\alpha]$ et pour tout entier positif p, on a :

$$\left|f^{(p)}(x)\right| \leq Mr\frac{1}{(r-\alpha)^{p+1}}\,p!.$$

Partie III

On se propose dans cette partie de prouver le résultat suivant : si f est une fonction développable en série entière au voisinage de 0 avec $f(0) \neq 0$, alors $1/f$ est développable en série entière au voisinage de 0.

11. **a.** Prouver que si le résultat précédemment énoncé est vrai, alors on peut en conclure que la fonction tangente est développable en série entière au voisinage de 0.

b. Prouver que l'on peut toujours se ramener au cas où $f(0) = 1$ (cette hypothèse sera faite dans la suite).

12. Soit donc $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière complexe de rayon de convergence R non nul, avec $a_0 = 1$.

a. Prouver l'existence d'un réel $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée.

b. En déduire l'existence d'une constante positive ρ telle que $\left|a_n\right| \leq \rho^n$ pour tout entier n.

c. Prouver qu'il existe une unique suite de complexes (b_n) telle que :

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ \forall\, n \geq 1,\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = 0 \end{cases}.$$

d. Prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|b_n\right| \leq (2\rho)^n$.

Que peut-on en déduire à propos du rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$?

e. Conclure.

Partie IV

On *admettra* dans cette partie le résultat suivant (qui peut être établi grâce à l'analyse de Fourier) :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \cos x = \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right).$$

13. **a.** Donner, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, une représentation de $\ln(\cos x)$ sous forme d'une somme de série.

b. En déduire l'identité suivante :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{8x}{(2k+1)^2\pi^2-4x^2}.$$

14. On désigne par ζ la fonction dzéta de Riemann définie pour $s>1$ par $\zeta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$.

a. Prouver, pour $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^n}=\frac{2^n-1}{2^n}\zeta(n).$$

b. En déduire le développement en série entière de la fonction tangente :

$$\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(4^n-1)}{\pi^{2n}}\zeta(2n)x^{2n-1}.$$

c. Que vaut le rayon de convergence de cette série entière ?

\-------------------------