Préliminaires

1. Soit $Q = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme réel de degré n à coefficients *positifs*.
Prouver que $\forall t \in [-1,1], \quad |Q(t)| \le Q(1)$ et $|Q'(t)| \le nQ(1)$.

On a facilement : $\begin{cases} |Q(t)| \le a_n |t|^n + \ldots + a_1 |t| + a_0 \le a_n + \ldots + a_1 + a_0 = Q(1) \\ |Q'(t)| \le n a_n |t|^{n-1} + \ldots + 2a_2 |t| + a_1 \le n(a_n + \ldots + a_1) \le nQ(1) \end{cases}$.

2. **a.** Prouver, pour tout entier p, l'existence d'un polynôme réel P_p tel que :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \quad \tan^{(p)} x = P_p(\tan x).$$

Pour $p = 0$, $P_0 = X$ *convient. Pour* $p = 1$, $P_1 = 1 + X^2$ *convient.*

Enfin, si $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \quad \tan^{(p)} x = P_p(\tan x)$, *alors* $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \quad \tan^{(p+1)} x = (1+\tan^2 x) P_p{}'(\tan x)$ *et il suffit de poser* $P_{p+1} = (1+X^2)P_p{}'$.

b. Prouver qu'un tel polynôme P_p est unique.

Si $P_p(\tan x) = Q_p(\tan x)$ *pour tout* x *de* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, *les polynômes* P_p *et* Q_p *coïncident sur* $\mathbb{R}$, *ils sont égaux.*

c. Donner une formule de récurrence liant P_{p+1} et P_p, et en déduire le degré de P_p et le fait que ses coefficients sont positifs.

Dans la récurrence de la question **2.a.**, *on a posé* $P_{p+1} = (1+X^2)P_p{}'$. *Comme* $P_0 = X$ *est réel à coefficients positifs et de degré 1, on en déduit trivialement par récurrence que* P_p *est lui-aussi réel, à coefficients positifs, et de degré* $p+1$.

3. **a.** Prouver que $0 \le P_{p+1}(1) \le 2(p+1)P_p(1)$.

On utilise les résultats de la question **1.**, *lesquels s'appliquent puisque* P_{p+1} *est à coefficients positifs :*

$$0 \le P_{p+1}(1) = \left((1+X^2)P_p{}'(X)\right)(1) = 2P_p{}'(1) \le 2\deg(P_p{}')P_p(1) = 2(p+1)P_p(1)$$

En déduire une majoration de $P_p(1)$ valable pour tout entier p.

Il en résulte trivialement par récurrence que $0 \le P_{p+1}(1) \le 2^{p+1}(p+1)!\,P_0(1) = 2^{p+1}(p+1)!$.

b. Prouver que $\forall x \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[, \quad |\tan^{(p)} x| = |P_p(\tan x)| \le 2^p p!$.

*Il s'agit d'une application directe du premier résultat de la question **1.** et de la majoration précédente.*

Partie I

On dit qu'une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est *absolument monotone* sur I si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, et si f ainsi que ses dérivées de tout ordre sont positives sur I :

f est absolument monotone (on pourra noter $f >> 0$) sur $I \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \ge 0$.

4. Soient f et g deux fonctions absolument monotones sur I. Prouver que $f+g$ et fg sont absolument monotones sur I.

C'est parfaitement immédiat par linéarité de la dérivation et d'après la formule de Leibniz de dérivation à l'ordre n d'un produit.

5. **a.** Pour quelles valeurs du réel α la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ est-elle absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$?

Il est facile de voir que si α est un entier positif, la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ est absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$. En revanche, si α n'est pas un entier positif, les dérivations successives vont générer un terme de la forme $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)$ qui, un jour ou l'autre deviendra strictement négatif. Finalement, la fonction $x \mapsto x^{\alpha}$ est absolument monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha \in \mathbb{N}$.

b. Prouver grâce aux préliminaires que la fonction tangente est absolument monotone sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}[,\ \tan^{(p)} x = P_p(\tan x)$ *avec* $\tan x \geq 0$ *et* P_p *à coefficients positifs. Le résultat en découle facilement.*

6. Soit f une fonction absolument monotone sur un intervalle $[0,A[$ (A étant un réel strictement positif). On se propose dans cette question de prouver que f est somme de sa série de Taylor sur cet intervalle.

a. Prouver que pour tout x de $[0,A[$ et pour tout entier n, on a : $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leq f(x)$.

On écrit la formule de Taylor avec reste intégrale, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$, *et l'on constate que le reste intégrale est positif.*

En déduire que la série $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est convergente.

Il s'agit d'une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées (par $f(x)$), elle converge.

b. On fixe un réel x dans $[0,A[$, et on envisage un réel B vérifiant $x < B < A$.

i. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,B[,\ f^{(n)}(t) \leq n! \frac{f(B)}{(B-t)^n}$.

On écrit la formule de Taylor entre t et B :

$$f(B) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (B-t)^k + \int_t^B \frac{(B-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u \ ;$$

on constate alors que tous les termes figurant dans cette égalité sont positifs, il suffit donc d'isoler le terme $\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(B-t)^n$ et de le majorer par $f(B)$.

ii. Étudier sommairement les variations de la fonction h définie sur $[0,x]$ par : $h(t) = \frac{x-t}{B-t}$.

h décroît de $\frac{x}{B}$ à 0 sur cet intervalle, et il vient en particulier que $0 \leq h(t) \leq \frac{x}{B}$.

iii. En déduire une majoration du reste intégrale dans la formule de Taylor écrite à l'ordre n entre 0 et x.

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} (n+1)! \frac{f(B)}{(B-t)^{n+1}} \mathrm{d}t \leq (n+1)f(B) \int_0^x \frac{h^n(t)}{B-t} \mathrm{d}t \leq (n+1)f(B)(\frac{x}{B})^n \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{B-t}.$$

iv. Prouver que $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

$$0\leq f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\leq(n+1)f(B)(\frac{x}{B})^n\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{B-t}\underset{n\to+\infty}{\to}0\,.$$

7. Prouver que la fonction tangente est somme de sa série de Taylor sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Puisque la fonction tangente est absolument monotone sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ *, elle y est somme de sa série de Taylor. Par imparité, l'égalité reste valable sur* $]-\frac{\pi}{2},0]$ *(en effet, la série de Taylor de la fonction tangente ne comporte que des termes impairs par imparité de la tangente).*

Partie II

On établit dans cette partie une condition nécessaire et suffisante (portant sur l'ordre de grandeur de ses dérivées successives) pour qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ soit développable en série entière.

8. Soit *f* une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-\alpha,\alpha[$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose l'existence de deux constantes A et k telles que :

$$\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|f^{(n)}(x)\right|\leq Ak^n n!\,.$$

Prouver, grâce à une formule de Taylor, que *f* est développable en série entière autour de 0, et expliciter un intervalle sur lequel *f* est somme de sa série de Taylor.

On utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange écrite entre 0 et x :

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|\leq\frac{\left|x\right|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[0,x]}\left|f^{(n+1)}(t)\right|\leq A\left|kx\right|^{n+1}.$$

Comme le majorant tend vers 0 pour $\left|kx\right|<1$, *on en déduit que f est somme de sa série de Taylor sur* $]-\frac{1}{k},\frac{1}{k}[\cap]-\alpha,\alpha[$.

9. Prouver, grâce aux préliminaires, que la fonction tangente est développable en série entière sur un intervalle que l'on précisera.

*L'inégalité de la question **3.b.** affirme que* $\forall x\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[,\ \left|\tan^{(p)}x\right|=\left|P_p(\tan x)\right|\leq 2^p p!$. *Conjuguée à ce qui précède, elle permet d'affirmer que la fonction tangente est développable en série entière sur* $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$.

10. Réciproquement, on se donne une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul, et on désigne par $f(x)$ sa somme pour x élément de $]-R,R[$. Soit r un élément de $]0,R[$, et α un réel vérifiant $0\leq\alpha<r$.

a. Prouver que la suite $(a_n r^n)$ est bornée ; on notera $M=\sup_n\left|a_n r^n\right|$.

Puisque $r\in]0,R[$ *, la série* $\sum a_n r^n$ *est convergente. Son terme général* $a_n r^n$ *tend donc vers 0 et par voie de* *conséquence la suite $(a_n r^n)$ est bornée* **b.**

Quelle formule obtient-on en dérivant à un ordre $p \in \mathbb{N}$ le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x}$?

Comme on peut dériver une série entière terme à terme à n'importe quel ordre sur son intervalle ouvert de convergence, il vient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(p)} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)x^{n-p} .$$

c. Prouver que pour tout x de $[-\alpha,\alpha]$ et pour tout entier positif p, on a :

$$\left|f^{(p)}(x)\right| \le Mr\frac{1}{(r-\alpha)^{p+1}}\,p!\,.$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in [-\alpha,\alpha],\ \left|f^{(p)}(x)\right| &= \left|\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p}\right| \\
&\le \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)\left|a_n\right|\left|x\right|^{n-p} \\
&\le \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)\frac{M}{r^n}\left|x\right|^{n-p} \\
&= \frac{M}{r^p}\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)\left|\frac{x}{r}\right|^{n-p} \\
&= \frac{M}{r^p}\left(\frac{1}{1-t}\right)^{(p)}\left(\left|\frac{x}{r}\right|\right) \\
&= \frac{M}{r^p}\frac{p!}{\left(1-\left|\frac{x}{r}\right|\right)^{p+1}} \\
&= \frac{Mp!\,r}{\left(r-\left|x\right|\right)^{p+1}} \le \frac{Mrp!}{(r-\alpha)^{p+1}}.
\end{aligned}$$

Partie III

On se propose dans cette partie de prouver le résultat suivant : si f est une fonction développable en série entière au voisinage de 0 avec $f(0) \neq 0$, alors $1/f$ est développable en série entière au voisinage de 0.

11. **a.** Prouver que si le résultat précédemment énoncé est vrai, alors on peut en conclure que la fonction tangente est développable en série entière au voisinage de 0.

En admettant ce résultat, on peut affirmer que $\dfrac{1}{\cos}$ est développable en série entière autour de 0. En multipliant par le sinus qui est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on obtient ce qui est demandé.

b. Prouver que l'on peut toujours se ramener au cas où $f(0) = 1$ (cette hypothèse sera faite dans la suite).

On pose $g = \dfrac{f}{f(0)}$. Alors $g(0) = 1$ et si g est développable en série entière, f l'est aussi.

12. Soit donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R non nul, avec $a_0 = 1$.

a. Prouver l'existence d'un réel $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée.

*Il suffit de prendre $r \in]0,R[$ comme dans la question **10.a.**.*

b. En déduire l'existence d'une constante positive ρ telle que $\left|a_n\right| \leq \rho^n$ pour tout entier n.

On écrit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|a_n\right| \leq \dfrac{M}{r^n} \leq \dfrac{M+1}{r^n} \leq \left(\dfrac{M+1}{r}\right)^n$ *et* $\rho = \dfrac{M+1}{r}$ *convient. De plus, l'inégalité reste valable pour* $n = 0$ *puisque* $a_0 = 1$.

c. Prouver qu'il existe une unique suite de complexes (b_n) telle que :

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ \forall\, n \geq 1,\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = 0 \end{cases}.$$

Il s'agit d'un système triangulaire. La première égalité donne $b_0 = 1$ *et la seconde permet, connaissant* $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$, *de calculer* b_n.

d. Prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|b_n\right| \leq (2\rho)^n$.

Par récurrence. L'inégalité est vraie pour $n = 0$ *et si elle est vraie pour* $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$, *alors :*

$$\begin{aligned} \left|b_n\right| &= \left|-a_1 b_{n-1} - \ldots - a_{n-1} b_1 - a_n b_0\right| \\ &\leq \rho 2^{n-1} \rho^{n-1} + \ldots + \rho^{n-1} 2\rho + \rho^n \\ &= (2^{n-1} + \ldots + 2 + 1)\rho^n \\ &= (2^n - 1)\rho^n \\ &\leq (2\rho)^n. \end{aligned}$$

Que peut-on en déduire à propos du rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$?

Qu'il est plus grand que $\dfrac{1}{2\rho}$, *donc non nul.*

e. Conclure.

Les séries entières $\sum a_n x^n$ *et* $\sum b_n x^n$ *ont toutes deux un rayon de convergence non nul. En multipliant leurs sommes pour* $\left|x\right| < \inf(R_a, R_b)$, *il vient :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) x^n = 1.$$

$1/f$ *est donc bien développable en série entière autour de 0.*

Partie IV

On *admettra* dans cette partie le résultat suivant (qui peut être établi grâce à l'analyse de Fourier) :

$$\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \cos x = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2}\right).$$

13. **a.** Donner, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, une représentation de $\ln(\cos x)$ sous forme d'une somme de série.

Par continuité du ln, il vient :

$$\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \ln(\cos x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2}\right).$$

b. En déduire l'identité suivante :

$$\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2 \pi^2 - 4x^2}.$$

Il s'agit, bien entendu (?), de dériver l'égalité précédente. Je vous laisse le soin de mettre en place le théorème approprié.

14. On désigne par ζ la fonction dzéta de Riemann définie pour $s > 1$ par $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$.

a. Prouver, pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} \zeta(n).$$

On casse en deux la série définissant $\zeta(n)$ en séparant indices pairs et impairs :

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^n} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^n} = \frac{1}{2^n}\zeta(n) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^n}, \text{ \textit{d'où le résultat.}}$$

b. En déduire le développement en série entière de la fonction tangente :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ \tan x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(4^n - 1)}{\pi^{2n}} \zeta(2n) x^{2n-1}.$$

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ \tan x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2 \pi^2 - 4x^2} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2 \pi^2 (1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2})} \end{aligned}$$

Mais $0 < \frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2} < 1$*, on peut donc développer* $\frac{1}{1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2}}$ *en série géométrique. Il vient alors :*

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ \tan x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2 \pi^2 (1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2})} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2 \pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} (\frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2})^p \end{aligned}$$

La série double obtenue étant à termes positifs et étant convergente dans ce sens, on peut intervertir l'ordre des sommations et il vient :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ \tan x &= \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{8x}{(2k+1)^2 \pi^2} (\frac{4x^2}{(2k+1)^2 \pi^2})^p \\ &= 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1} x^{2p+1}}{\pi^{2p+2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2p+2}} \\ &= 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^{p+1} x^{2p+1}}{\pi^{2p+2}} \frac{4^{p+1} - 1}{4^{p+1}} \zeta(2p+2) \end{aligned}$$

et l'on en déduit facilement l'égalité de l'énoncé par décalage d'indice.

c. Que vaut le rayon de convergence de cette série entière ?

On utilise la règle de d'Alembert et comme il est censé être connu que la fonction ζ tend vers 1 à l'infini, on trouve que le rayon de convergence cherché est $\frac{\pi}{2}$.
