PROBLÈME I

(*Algorithme de Leverrier*)

1. On se donne $2p+2$ matrices $P_0, P_1, \dots, P_p$ et $Q_0, Q_1, \dots, Q_p$. On suppose que pour tout réel x, on a :

$$Q_p x^p + Q_{p-1}x^{p-1} + \dots + Q_1 x + Q_0 = P_p x^p + P_{p-1}x^{p-1} + \dots + P_1 x + P_0 .$$

Prouver alors que $P_i = Q_i$ pour tout entier i compris entre 0 et p.

2. On considère n fonctions $V_1, \dots, V_n$ dérivables sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, et la fonction Δ de I dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$\Delta : x \mapsto \det_{\varepsilon}\big(V_1(x), \dots, V_n(x)\big).$$

Prouver que Δ est dérivable sur I et que pour tout x de I, on a :

$$\Delta'(x) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\varepsilon}\big(V_1(x), \dots, V_i'(x), \dots, V_n(x)\big).$$

On fixe désormais une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on note $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n$ son polynôme caractéristique.

Pour x élément de $\mathbb{R}$, on note $C(x) = {}^t\mathrm{com}(xI_n - A)$.

3. **a.** Prouver qu'il est possible d'écrire $C(x) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j C_j$ où les C_i sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Déterminer un système d'équations dont les matrices C_i sont solutions.

c. En déduire une expression des C_i en fonctions des coefficients de P et des puissances de A. Comment s'appelle la dernière formule obtenue ? (ça a un léger côté magique, non ?)

4. **a.** Prouver que pour tout réel x, on a $\mathrm{tr}\big(C(x)\big) = P'(x)$ (tr désigne la trace).

b. En déduire la valeur de la trace des matrices C_i en fonction des coefficients de P.

c. Quel algorithme pratique de détermination du polynôme caractéristique tout cela vous suggère-t-il ?

PROBLÈME II

Le but de ce problème est d'étudier le comportement de la suite des puissances d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie E.

$\mathcal{L}(E)$ désignera l'algèbre des endomorphismes de E, et k la dimension de E.

E sera supposé muni d'une norme $\|\ \|$.

On rappelle que l'on définit une norme sur $\mathcal{L}(E)$ en posant, pour tout élément u de $\mathcal{L}(E)$:

$$N(u) = \sup\left\{\|u(x)\|, x \in E, \|x\| = 1\right\}.$$

Partie I

5. Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i. La suite (u_n) est convergente dans $\mathcal{L}(E)$.

ii. Pour tout x de E, la suite $(u_n(x))$ converge dans E.

iii. Étant donnée une base $(e_1, \dots, e_k)$ de E, les k suites $(u_n(e_i))_n$, pour $1 \leq i \leq k$, convergent dans E.

6. De manière analogue, donner sans démonstration deux énoncés équivalents à l'énoncé suivant :

« la suite (u_n) est bornée dans $\mathcal{L}(E)$ ».

7. Soit u un endomorphisme de E. Prouver que pour que la suite de ses puissances soit bornée, il est nécessaire que toutes les valeurs propres de u soient de module inférieur ou égal à 1.

Prouver par un exemple que cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

Dans la suite de cette partie, u désigne un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que la suite (u^n) soit bornée.

8. **a.** Soit λ une valeur propre de module 1 de u (en supposant qu'il en existe une !). Soit x un élément du noyau de l'endomorphisme $(u - \lambda Id)^2$. Exprimer, pour n entier naturel non nul, le vecteur $u^n(x)$ en fonction de x et de $y = u(x) - \lambda x$. En déduire que x est dans le noyau de $u - \lambda Id$.

Prouver alors que E est somme directe de $\ker(u - \lambda Id)$ et de $\operatorname{Im}(u - \lambda Id)$.

b. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice M de s'écrit par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où D est une matrice diagonale — éventuellement de taille nulle — dont les éléments diagonaux sont tous de module 1, et A une matrice carrée dont les valeurs propres sont toutes de module strictement plus petit que 1.

(<u>Indication</u> : On pourra constater que $\operatorname{Im}(u - \lambda Id)$ est stable par u, et procéder par récurrence.)

c. λ désignant une valeur propre de module 1 de u, que peut-on dire de la dimension de l'espace propre correspondant ?

Partie II

9. **a.** Soit λ un complexe de module strictement plus petit que 1, et N une matrice nilpotente. Prouver que la suite des puissances de la matrice $J = \lambda I_k + N$ tend vers zéro.

b. Soit A une matrice carrée complexe dont toutes les valeurs propres sont de module strictement plus petit que 1. Démontrer, en utilisant le théorème de réduction spectrale, que la suite (A^n) tend vers zéro.

10. En déduire que la réciproque du résultat établi dans la question **I.4.b.** est exacte, à savoir que si un endomorphisme u de E possède dans une bonne base une matrice du type décrit dans cette question, alors la suite (u^n) de ses puissances est bornée.

11. Étant donné un endomorphisme u de E, déduire de tout ce qui précède une condition nécessaire et suffisante pour que la suite de ses puissances tende vers zéro.

Partie III

(*Étude des puissances des matrices stochastiques*)

On désigne par $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices dites « stochastiques » de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M = [m_{i,j}]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- les n^2 coefficients de la matrice M sont des réels positifs ;
- la somme des termes de chaque ligne de M vaut 1 : $\forall\, i \in [[1,n]],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$.

Ces matrices stochastiques jouent un rôle important en théorie des Probabilités.

Si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et si $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose :

$$\left\|X\right\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left|x_i\right| \text{ et } \left\|A\right\| = \max_{1\le i,j\le n} \left|a_{i,j}\right|.$$

Par ailleurs, pour $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :

$$\ker A = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = 0\right\} \text{ et } \operatorname{Im} A = \left\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ / \ \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = Y\right\}.$$

On fixe dans toute cette partie une matrice stochastique $M = [m_{i,j}] \in \mathcal{S}_n$, et l'on pose :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ C_k = \frac{I_n + M + M^2 + \ldots + M^k}{k+1}.$$

10. **a.** Prouver que l'ensemble $\mathcal{S}_n$ est stable pour le produit.

b. Prouver que la limite d'une suite convergente de matrices stochastiques est elle-même une matrice stochastique.

Que peut-on en déduire concernant l'ensemble $\mathcal{S}_n$?

c. Démontrer que si la suite (M^k) converge vers une matrice L, alors L est une matrice de projection (on calculera de deux manières différentes la limite de la suite (M^{2k})).

d. Démontrer que si la suite (M^k) converge vers L, alors la suite (C_k) converge elle-aussi vers L.

11. **a.** On désigne par J le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les coordonnées valent 1.

Calculer MJ. Que peut-on en déduire ?

b. Prouver que pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on a $\left\|MX\right\|_\infty \le \left\|X\right\|_\infty$.

En déduire que toutes les valeurs propres complexes de M sont de module inférieur ou égal à 1.

Quelles inégalités en déduit-on sur le déterminant et la trace de M ?

c. On considère une matrice colonne Y appartenant à $\operatorname{Im}(M - I_n)$ que l'on écrit $Y = MX - X$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Prouver que si $Y \in \ker(M - I_n)$, alors pour tout entier k on a $M^k X = kY + X$, puis que $\left\|Y\right\|_\infty \le \frac{2}{k}\left\|X\right\|_\infty$.

d. En déduire que Y est nul, puis que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(M - I_n) \oplus \operatorname{Im}(M - I_n)$.

Dans toute la suite de cette partie, on convient de noter P la matrice de la projection sur $\ker(M - I_n)$ *parallèlement à* $\operatorname{Im}(M - I_n)$.

12. **a.** On décompose un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur la somme $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(M - I_n) \oplus \operatorname{Im}(M - I_n)$ en posant

$$X = X_1 + X_2 \text{ avec } X_1 = PX \in \ker(M - I_n) \text{ et } X_2 = MZ - Z \in \operatorname{Im}(M - I_n).$$

Donner l'expression de $C_k X$ et montrer que $\left\| C_k X - PX \right\|_\infty \leq \dfrac{2\left\| Z \right\|_\infty}{k}$.

b. En déduire que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lim\limits_{k \to \infty} C_k X = PX$, puis que $\lim\limits_{k \to \infty} C_k = P$.

c. En déduire la limite de la suite (M^k) quand celle-ci est convergente.