Les différentes parties constituant ce problème sont totalement indépendantes entre elles.

Partie I

On donne la matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Déterminer (après avoir observé une particularité de A) le polynôme caractéristique P_A de A.

b. A est-elle diagonalisable ?

2. On note π_A le polynôme minimal de A, c'est à dire le polynôme unitaire de plus petit degré parmi les polynômes non nuls annulateurs de A.

Donner les deux valeurs possibles de π_A, puis sa valeur exacte en utilisant le résultat de la question **1.b.**.

3. Prouver que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de I_4, A, A^2 et A^3.

4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice A dans la base canonique .

a. Prouver que l'on a $\mathbb{R}^4 = \ker(u - Id)^2 \oplus \ker(u - 2Id) \oplus \ker(u - 3Id)$.

b. Quelle est la dimension de $\ker(u - Id)^2$? Justifier sans calcul que l'inclusion de $\ker(u - Id)$ dans $\ker(u - Id)^2$ est stricte.

c. En déduire que A est semblable à la matrice R suivante :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. On désigne par e une base dans laquelle la matrice de u est la matrice R précédente (*on ne demande pas d'expliciter une telle base* e).

a. Prouver que si v est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ qui commute avec u, alors les sous-espaces $\ker(u - Id)^2$, $\ker(u - 2Id)$ et $\ker(u - 3Id)$ sont stables par v.

b. En déduire, toujours en supposant que v commute avec u, la forme nécessaire de la matrice de v dans la base e.

c. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d. Donner, par l'intermédiaire de leur matrice dans la base e, *tous* les endomorphismes v de $\mathbb{R}^4$ qui commutent avec u. Quelle est la dimension de l'espace qu'ils constituent ?

6. **a.** Soient M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = N$. Prouver que M et N commutent.

b. Donner *toutes* les matrices K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $K^2 = J$ (la matrice J a été définie à la question **5.c.**).

c. En déduire *toutes* les matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = R$.

7. **a.** Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice R de la question **4.c.** est semblable à la matrice :

$$R_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b. L'orbite de A pour la relation de similitude est-elle fermée ? (ou, en termes plus simples : la limite d'une suite convergente de matrices semblables à A est-elle semblable à A ?).

c. On se donne une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on suppose diagonalisable. Soit une suite convergente $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, supposées toutes semblables à M, et soit L la limite de cette suite.

Prouver que les matrices M_p ont toutes pour polynôme caractéristique le polynôme caractéristique P_M de M, et que si Q désigne un polynôme annulateur de M, on a $Q(M_p) = 0$ pour tout entier p.

En déduire que L est semblable à M.

Partie II

On se propose dans cette partie de décrire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée de la valeur propre de plus grand module d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On fixe donc un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (chaque valeur propre étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique P_A de A). On suppose en outre que l'on a

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|,$$

la valeur propre de plus grand module de A est donc *simple*.

8. **a.** Pourquoi A est-elle trigonalisable ?

b. Exprimer le déterminant de A en fonction des λ_i.

9. **a.** Pour $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer la trace t_p de la matrice A^p en fonction des λ_i.

b. Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{t_{p+1}}{t_p}\right)$.

c. Pourquoi le calcul de A^{2^p} n'est-il pas plus coûteux que celui de A^{p+1} ? En quoi cela permet-il d'améliorer le résultat de la question précédente ?

10. Soit le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + 3$.

a. Prouver que P possède trois racines réelles a, b, c vérifiant $-1 < a < 0 < b < 2 < c$.

b. Soit C la matrice suivante :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Déterminer le polynôme caractéristique de C.

c. Déterminer une valeur approchée de c.

Partie III

On considère la matrice A_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A_n est donc la matrice dont tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale qui sont égaux à 2, et ceux des sur et sous-diagonale qui sont égaux à -1.

11. On note d_n le déterminant de A_n.

a. Donner une relation de récurrence simple entre d_n, d_{n-1} et d_{n-2} pour $n \geq 3$.

b. En déduire la valeur de d_n.

12. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $X_\theta = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \sin 2\theta \\ \vdots \\ \sin n\theta \end{bmatrix}$.

a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'identité :

$$-\sin(k-1)\theta + 2\sin k\theta - \sin(k+1)\theta = 2(1-\cos\theta)\sin k\theta .$$

b. Exprimer simplement $A_n X_\theta$ grâce à la question précédente.

c. Comment choisir θ pour que X_θ soit vecteur propre de A_n ?

Ce choix étant fait, quelle est la valeur propre de A_n correspondante ?

d. Prouver que A_n est diagonalisable.

13. On note α_n la plus petite valeur propre de A_n, β_n la plus grande.

a. Déterminer α_n et β_n.

b. Donner un équivalent de $\gamma_n = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$ quand n tend vers l'infini.

Le réel γ_n est appelé le « conditionnement » de la matrice A_n. Le conditionnement d'une matrice donne une indication sur la façon dont cette matrice supporte les calculs approchés : s'il est grand, la matrice est sensible aux erreurs d'arrondis, on dit alors qu'elle est mal conditionnée. À titre d'exemple, envisageons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que la solution de l'équation $AX = B$ *est* $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Supposons que l'on remplace B par la matrice B' *suivante, dont les coefficients sont très proches de ceux de* B : $B' = \begin{pmatrix} 19,01 \\ 11,05 \\ 14,07 \\ 14,05 \end{pmatrix}$. *Alors la solution de l'équation* $AX' = B'$ *est donnée par...* $X' = \begin{pmatrix} -2,34 \\ 9,745 \\ -4,85 \\ -1,34 \end{pmatrix}$, *matrice dont la ressemblance avec X ne saute pas aux yeux ! La matrice A, pourtant d'apparence simple, est très mal conditionnée.*

On déduit ainsi de la question ***13.b.*** *que la matrice* A_n *est très mal conditionnée quand n devient grand. C'est d'autant plus ennuyeux que* A_n *intervient dans des calculs numériques reposant sur des approximations qui ne sont valables que pour n grand ! C'est l'objet de la question* ***14.*** *suivante.*

14. **a.** Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$, $a \in]0,1[$ et h assez petit pour que $a+h$ et $a-h$ soient dans $[0,1]$. On note M_4 un majorant de $\left|f^{(4)}(t)\right|$ sur $[0,1]$. Prouver que :

$$\left|\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} - f''(a)\right| \leq \frac{h^2}{12} M_4 .$$

b. On se donne une fonction numérique g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, et l'on étudie la solution f de l'équation différentielle $y'' = -g$ satisfaisant à $f(0) = f(1) = 0$.

Prouver l'existence et l'unicité de f.

c. On pose, pour $n \geq 2$ et $k = 0,\ldots,n$, $y_k = f(\frac{k}{n})$ et $g_k = g(\frac{k}{n})$. Prouver, pour $k = 1,\ldots,n-1$, les inégalités :

$$\left|\frac{-y_{k-1}+2y_k-y_{k+1}}{1/n^2} - g_k\right| \leq \frac{1}{12n^2} m_2 .$$

d. En assimilant $-y_{k-1}+2y_k-y_{k+1}$ à $\frac{1}{n^2} g_k$, comment déterminer les y_k ?