PROBLÈME 1

1. Soit u un endomorphisme de E, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Prouver que s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, alors u est nilpotent.

2. Soit réciproquement un endomorphisme nilpotent de E.

a. Prouver que le noyau de u ne se réduit pas à $\{0\}$.

b. Soit e_1 un élément non nul du noyau de u, que l'on complète en une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E. On écrit alors la matrice de u dans cette base :

$$\operatorname{Mat}_e u = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}).$$

c. Prouver que la matrice A est nilpotente.

d. En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.

<u>Application</u>

Soient u et n deux endomorphismes de E tels que :

i. n est nilpotent ;

ii. u et n commutent ($u \circ n = n \circ u$)

Il s'agit de prouver que $\det(u+n) = \det u$.

b. On suppose dans cette question que u est inversible.

Prouver que u^{-1} et n commutent, puis que $u^{-1} \circ n$ est nilpotent. En déduire la valeur de $\det(I + u^{-1} \circ \mathrm{n})$, puis le résultat énoncé.

c. On suppose dans cette question que u n'est pas inversible.

Prouver que le noyau de u est stable par n, et que si n' désigne la restriction de n au noyau de u, alors n' est nilpotent. En déduire l'existence d'un vecteur a non nul tel que $u(a) = n(a) = 0$, puis conclure.

d. Proposer une autre démonstration dans le cas où u n'est pas inversible.

3. On suppose dans cette question que $n = \dim E = 3$, et que u est un endomorphisme nilpotent non nul de E.

a. Prouver que le rang de u vaut 1 ou 2.

b. On suppose que u est de rang 1.

Donner les dimensions des noyaux de u et de u^3. En déduire que l'indice de nilpotence de u est égal à 2 (penser aux noyaux itérés).

Prouver alors l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. On suppose que u est de rang 2.

Prouver que $u^2 \neq 0$. En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. On note Z_n le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices de trace nulle.

a. Justifier brièvement que Z_n est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et en donner la dimension.

b. Prouver qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblable à une matrice de diagonale nulle est dans Z_n.

c. Soit, réciproquement, une matrice M non nulle de trace nulle, et m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice M dans la base canonique.

Prouver que m n'est pas une homothétie, puis qu'il existe une base $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de m possède un 0 en position 1-1.

Grâce à un raisonnement par récurrence, prouver alors l'existence d'une base $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de m ne possède que des zéros sur sa diagonale.

Conclure.

d. Quelle est la dimension de D_n (dont il est trivial que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$!) ?

e. On note D la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1,2,\dots,n)$.

Prouver que toute matrice de D_n peut s'écrire $MD - DM$.

f. En déduire que toute matrice de Z_n peut s'écrire $AB - BA$ où A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

5. Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par les matrices nilpotentes.

PROBLÈME 2

Étude d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par $N(A)$ la plus grande somme des modules des termes de chaque colonne de A, c'est-à-dire :

$$\text{si } A = (a_{i,j}),\ N(A) = \sup_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right).$$

6. Prouver que N définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

7. Prouver que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $N(A^{\mathrm{T}}) \le nN(A)$.

Existe-t-il des matrices non nulles vérifiant l'égalité ?

8. Prouver que si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $N(AB) \le N(A)N(B)$.

Existe-t-il des matrices non nulles vérifiant l'égalité ?

9. En utilisant la formule donnant le déterminant, prouver que si $A = (a_{i,j})$ est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\left|\det(A)\right| \le \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right).$$

En déduire que $\left|\det(A)\right| \leq N(A)^n$.

10. On se propose de déterminer les matrices $A = (a_{i,j})$ réalisant l'égalité $\left|\det(A)\right| = \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|\right)$.

a. Quelles sont les matrices A non inversibles pour lesquelles cette égalité est vérifiée ?

b. On suppose ici que A est inversible.

i. Prouver que tout produit de la forme $a_{i_1,1}a_{i_2,2}\dots a_{i_n,n}$ où l'un des indices i_k apparaît au moins deux fois est nul.

ii. En déduire que chaque ligne de A possède au plus un terme non nul.

iii. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice inversible A vérifie l'égalité proposée est que chaque ligne et chaque colonne de A possèdent un et un seul terme non nul.

11. Prouver que si A est inversible, on a $N(A^{-1}) \leq n\dfrac{N(A)^{n-1}}{\left|\det(A)\right|}$.

PROBLÈME 3

On notera $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n, n désignant un entier naturel non nul.

$\mathcal{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes, 0 la matrice nulle et I_n la matrice identité de cette algèbre.

Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on note $A = (a_{i,j})$ où $a_{i,j}$ désigne l'élément de A situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, et $\operatorname{rg}(A)$ le rang de A.

Pour i et j éléments de $\mathbb{N}_n$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, qui vaut 1. La famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n$.

On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$ avec complexe et i différent de j.

12. **a.** Calculer les produits matriciels $E_{i,j}E_{k,l}$.

b. Calculer le déterminant d'une matrice de transvection.

c. Calculer le produit de deux matrices de transvection. En déduire l'inverse d'une telle matrice.

13. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$.

a. Montrer que l'addition à une ligne de A d'un vecteur proportionnel à une autre ligne peut se faire en multipliant A à gauche par une matrice de transvection.

b. Établir un résultat analogue pour les colonnes.

14. Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n$. On suppose que la première ligne ou la première colonne de A possède un élément non nul.

Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n$, toutes deux produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ ait son terme en position 1-1 égal à 1, et tous les autres termes de sa première ligne et de sa premières colonnes égaux à 0.

(On pourra successivement envisager les cas suivants :

i. $a_{1,1} = 1$;

ii. $\exists i > 1$ tel que $a_{i,1} \neq 0$ ou $a_{1,i} \neq 0$;

iii. $a_{1,1} \neq 1$ et $\forall i > 1,\ a_{i,1} = a_{1,i} = 0$).

15. Soit A un élément non nul de $\mathcal{M}_n$, de rang égal à r.

Grâce à un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n$, toutes deux produits de matrices de transvection, telles que la matrice $\mathcal{M}_n$ soit une matrice diagonale de coefficients $b_{i,j}$ vérifiant

i. $b_{i,i} = 1$ pour $1 \leq i < r$.

ii. $b_{i,i} = 0$ pour $i > r$.

iii. $b_{i,i} = d$ avec $d = 1$ si $r < n$ et $d = \det(A)$ si $r = n$.

16. Montrer que les matrices de transvection engendrent le groupe spécial linéaire d'ordre n.