On désigne par E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n ($n \geq 2$), et par Id_E l'application identité de E.

Un endomorphisme u de E est dit « nilpotent » si : $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$, 0 désignant l'endomorphisme nul de E. On définit alors « l'indice de nilpotence de u » comme le plus petit des entiers k tels que $u^k = 0$.

On définit de manière analogue une matrice carrée nilpotente et son indice de nilpotence.

Partie I

(*Exemple*)

On suppose dans cette partie que $n = 3$ et l'on fixe une base (i, j, k) de E. On considère l'endomorphisme u de E de matrice A dans la base (i, j, k) avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Déterminer le rang de u, une base de son noyau et une base de son image.

b. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\operatorname{Im} u = \left\{xi + yj + zk \ / \ ax + by + cz = 0\right\}$.

2. Prouver que u est nilpotent, et déterminer son indice de nilpotence.

3. Déterminer la matrice de u dans la base $(i + k, j, k)$.

4. On pose $B = I_3 + A$. On se propose de prouver de plusieurs manières que B est inversible, et pour chacune d'entre elles de déterminer B^{-1} par la méthode appropriée.

a. Prouver que B est inversible par la méthode du pivot, et donner B^{-1} .

b. Déterminer le noyau de $Id_E + u$, et ce en n'utilisant que le fait que u est nilpotent, en déduire que $Id_E + u$ est inversible et déterminer $(Id_E + u)^{-1}$ en résolvant l'équation $y = (Id_E + u)(x)$.

c. Calculer le déterminant de B, puis la valeur de B^{-1} *via* sa comatrice.

d. Utiliser la question **3.**.

5. **a.** Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1 + x}$ au voisinage de 0.

b. En déduire une matrice C *plausible* telle que $C^2 = B$, et vérifier que cette matrice convient.

6. Soit $\mathcal{A} = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \ / \ AM = MA\right\}$.

a. Prouver que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et déterminer la forme générale des éléments de $\mathcal{A}$.

b. Déterminer la dimension de $\mathcal{A}$, et prouver que (I_3, A, A^2) est une base de $\mathcal{A}$.

Partie II

(*Noyaux itérés*)

Soit v un endomorphisme de E. On pose, pour tout entier positif k :

$$N_k = \ker v^k \text{ et } I_k = \operatorname{Im} v^k .$$

7. **a.** Démontrer que la suite (N_k) est croissante au sens de l'inclusion.

b. Prouver l'existence d'un entier r tel que $N_r = N_{r+1}$.

c. Prouver que si p est un entier tel que $N_p = N_{p+1}$, alors $N_{p+1} = N_{p+2}$.

d. Concrètement, qu'a-t-on prouvé concernant la suite (N_k) ?

8. Énoncer des résultats analogues concernant les images I_k des v^k.

9. On note s le plus petit entier tel que $N_s = N_{s+1}$.

a. Prouver que $s \leq n$ (on pourra envisager deux cas suivant que v est inversible ou non).

b. Prouver que $I_s = I_{s+1}$.

c. Prouver que l'on a $E = \ker v^n \oplus \operatorname{Im} v^n$.

10. Pour k entier quelconque, on note $\delta_k = \dim I_k - \dim I_{k+1}$.

a. Établir l'existence d'un sous-espace vectoriel D_k de E tel que $I_k = I_{k+1} \oplus D_k$ et donner sa dimension.

b. Prouver que $I_{k+1} = I_{k+2} + v(D_k)$.

c. En déduire que la suite (δ_k) décroît. Qu'a-t-on prouvé ?

Partie III

(*Propriétés élémentaires des endomorphismes nilpotents*)

11. Soit u un endomorphisme non nul de E, que l'on suppose nilpotent. On note p son indice de nilpotence.

a. Prouver l'existence d'un vecteur a de E tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.

b. Prouver que la famille $(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a))$ est libre.

c. En déduire que $p \leq n$, puis que $u^n = 0$.

d. Application

On désigne par n l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prouver que n est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

On suppose qu'il existe un endomorphisme r de $\mathbb{C}^3$ tel que $r^2 = n$. Prouver que r est nilpotent, et justifier que la considération de r^4 conduit à une contradiction.

12. Soit u un endomorphisme de E.

Prouver que s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, alors u est nilpotent.

13. *On admet dans cette question la réciproque du résultat précédent, à savoir que tout endomorphisme nilpotent possède, dans une bonne base, une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.*

Soient u et n deux endomorphismes de E tels que : n est nilpotent ; u et n commutent ($u \circ n = n \circ u$).

Il s'agit de prouver que $\det(u+n) = \det(u)$.

a. On suppose dans cette question que u est inversible.

Prouver que u^{-1} et n commutent, puis que $u^{-1} \circ n$ est nilpotent. En déduire la valeur de $\det(I + u^{-1} \circ n)$, puis le résultat énoncé.

b. On suppose dans cette question que u n'est pas inversible.

Prouver que le noyau de u est stable par n, et que si n' désigne la restriction de n au noyau de u, alors n' est nilpotent. En déduire l'existence d'un vecteur a non nul tel que $u(a) = n(a) = 0$, puis conclure.

Partie IV

(*Représentation matricielle des endomorphismes nilpotents en dimension 2 et 3*)

On fixe dans toute cette partie un endomorphisme u de E, que l'on suppose nilpotent et non nul.

14. On suppose dans cette question que $n = \dim E = 2$.

a. En considérant un vecteur a tel que $u(a) \neq 0$ et en utilisant les résultats de la question **III.11.b.**, prouver l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Que peut-on dire de deux matrices 2-2 nilpotentes et non nulles ?

15. On suppose dans cette question que $n = \dim E = 3$.

a. Prouver que le rang de u vaut 1 ou 2.

b. On suppose que u est de rang 1.

Donner les dimensions des noyaux de u et de u^3. En déduire que l'indice de nilpotence de u est égal à 2 (penser aux noyaux itérés).

Prouver alors l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. On suppose que u est de rang 2.

Prouver que $u^2 \neq 0$. En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. <u>Exemple</u>

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer simplement, et à peu de frais, un scalaire λ tel que $v = u - \lambda I$ soit nilpotent.

b. Déterminer une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de v est l'une des deux matrices M ou N.

c. En déduire un mode de calcul de la matrice U^k pour k élément de $\mathbb{N}$.

Partie V

(*Commutateurs*)

17. On note Z_n le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices de trace nulle.

a. Justifier brièvement que Z_n est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et en donner la dimension.

b. Prouver que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls est dans Z_n.

c. Soit, réciproquement, une matrice M non nulle de trace nulle, et m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice M dans la base canonique.

Prouver que m n'est pas une homothétie, puis qu'il existe une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de m possède un 0 en position 1-1.

Grâce à un raisonnement par récurrence, prouver alors l'existence d'une base $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de m ne possède que des zéros sur sa diagonale.

Toute matrice de trace nulle est donc semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls (ces dernières matrices constituent un ensemble que l'on notera D_n dans la suite).

d. Quelle est la dimension de D_n (dont il est trivial que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$!) ?

e. On note D la matrice diagonale $\operatorname{diag}(1,2,\ldots,n)$.

Prouver que toute matrice de D_n peut s'écrire $MD - DM$.

f. En déduire que toute matrice de Z_n peut s'écrire $AB - BA$ où A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.