1. Un produit infini

> Convention : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. On dira que le "produit infini $\prod_n a_n$ " est convergent si la suite des "produits partiels" : $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ a une limite finie *non nulle*. Cette limite sera alors notée $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$.

On étudie ici, pour z complexe, la convergence du produit infini $\prod_n (1+z^n)$. On notera $P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1+z^k)$.

1. On se donne une suite $(c_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes.

a. Prouver que pour que le produit infini $\prod_n c_n$ soit convergent, il est nécessaire que la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ tende vers 1.

b. On suppose dans cette seule question que les c_n sont des réels strictement positifs. Prouver que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i. Le produit infini $\prod_n c_n$ est convergent.

ii. La série $\sum_n \ln(c_n)$ est convergente.

2. z désigne ici un complexe quelconque.

a. Prouver que pour que $P(z)$ existe, il faut que $|z| < 1$.

b. Prouver que pour tout réel r vérifiant $0 \leq r < 1$, $P(r)$ existe.

3. On fixe ici un complexe z tel que $|z| < 1$. Soit r un réel vérifiant $|z| < r < 1$.

a. Prouver que pour tout entiers p, on a :

$$\left|P_{p+1}(z) - P_p(z)\right| \leq P_{p+1}(r) - P_p(r).$$

b. En déduire que la suite $(P_n(z))$ est convergente.

c. Prouver que le produit infini $\prod_n (1-|z|^n)$ est convergent.

En déduire que la limite de la suite $(P_n(z))$ est non nulle.

d. Quel est le domaine de définition de la fonction $P : z \mapsto \prod_{n=1}^{\infty}(1+z^n)$?

4. On pose, pour x réel dans $[0,1[$ et n entier strictement positif : $R_n(x) = \prod_{k=n+1}^{\infty}(1+x^k) = \dfrac{P(x)}{P_n(x)}$.

a. Prouver que $0 \leq \ln(R_n(x)) \leq \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.

b. En déduire que $P(x) = P_n(x)\left(1 + \mathrm{o}(x^n)\right)$.

c. Prouver que P possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 et que si a_n est le coefficient de x^n dans ce développement limité, alors a_n n'est autre que le coefficient de X^n dans le développement du polynôme $P_n(X)$.

d. Calculer $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

5. **a.** Prouver que pour n entier strictement positif, a_n est égal au nombre de décompositions de n en sommes d'entiers non nuls deux à deux distincts (avec la convention selon laquelle deux décompositions ne différant que par l'ordre des termes seront considérées comme identiques).

b. En déduire que la suite (a_n) est croissante.

2. Seconde méthode de comparaison avec une intégrale

Dans tout ce problème, si a est un réel, $[a]$ désigne sa partie entière.

Partie I

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On dira que la fonction f vérifie la condition $(*)$ si sa dérivée f' est « sommable » sur $[1,+\infty[$, c'est à dire que ses « intégrales partielles » $\displaystyle\int_1^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ possèdent une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

0. Donner un exemple très simple de fonction f, continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\displaystyle\lim_{n\in\mathbb{N}, n\to+\infty} f(n)$ existe mais $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas (cette question a pour unique objectif de vous éviter de dire des bêtises dans la suite…).

1. Exemples

a. La fonction $t \mapsto \ln t$ vérifie-t-elle la condition $(*)$?

b. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ vérifie-t-elle la condition $(*)$?

c. La fonction $t \mapsto \cos t$ vérifie-t-elle la condition $(*)$? (on pourra faire un petit dessin, et regarder ce qui se passe pour $x = k\pi$ avec k entier tendant vers $+\infty$).

d. Prouver qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante positive et de limite nulle en $+\infty$, vérifie la condition $(*)$.

e. Soit la fonction g définie sur $[1,+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{\cos(\ln t)}{t}$.

Prouver que :

$$\forall t \geq 1,\ |g'(t)| \leq \frac{2}{t^2}.$$

En déduire que g vérifie la condition $(*)$.

2. On fixe dans cette question une fonction f vérifiant la condition $(*)$.

On pose, pour n entier, $n \geq 2$, $I_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$.

a. Prouver que la série de terme général I_n converge.

b. En déduire que la série de terme général $u_n = f(n) - f(n-1)$ converge absolument.

Que peut-on en déduire concernant la suite $\big(f(n)\big)$?

c. On note toujours $[x]$ la partie entière d'un réel x.

Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - f([x])\big] = 0\,.$$

En déduire que f possède une limite finie en $+\infty$.

3. On désigne toujours par f une fonction vérifiant la condition $(*)$, et pour $n \geq 2$, on pose :

$$d_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\,.$$

a. Prouver que $d_n = -\displaystyle\int_{n-1}^{n} (t-(n-1))f'(t)\mathrm{d}t$.

b. En déduire la convergence absolue de la série $\sum d_n$.

c. Prouver que la série $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\mathrm{d}t\right)$ est convergente.

4. Étudier élémentairement la convergence des séries de la forme $\displaystyle\sum \frac{\cos(\ln n)}{n^\alpha}$ dans le cas $\alpha > 1$.

5. On étudie dans cette question la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(\ln n)}{n}$.

a. En utilisant les résultats de la question **3.**, prouver que la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(\ln n)}{n}$ converge si et seulement si la suite $\big(\sin(\ln n)\big)$ converge.

b. Conclure quant à la nature de la série étudiée (cette question est nettement plus délicate que les précédentes…).

3. Un théorème de Tauber

On considère dans toute cette partie une suite réelle (a_n) telle que $\lim\limits_{n\infty} na_n = 0$.

1. **a.** Montrer l'existence d'une constante positive K telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leq \dfrac{K}{n}$.

b. En déduire que la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout x de $[0,1[$.

On pose désormais, pour tout x de $[0,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et l'on suppose que la fonction f ainsi définie possède une limite finie L quand x tend vers 1^-. On désire alors prouver que la série $\sum a_n$ converge et a pour somme L.

Avis !!! Je vous rappelle qu'on ne sait pas passer à la limite dans une somme infinie. Ce résultat n'a donc strictement rien d'évident !

Pour tout entier n, on pose $u_n = L - \sum_{k=0}^{n} a_k$, et l'on cherche donc à prouver que $\lim_n L_n = 0$

2. Prouver qu'il est possible d'écrire, pour tout entier n et tout réel x de $[0,1[$:

$$u_n = L - f(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \ .$$

3. **a.** Justifier l'existence, pour tout entier n, du réel $M_n = \sup_{k \geq n} |ka_k|$.

b. Prouver que la suite (M_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

4. Déduire de ce qui précède les majorations suivantes, valables pour tout entier n et tout réel x de $[0,1[$:

$$|u_n| \leq |L - f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |a_k|(1 - x^k) + \frac{M_n}{n(1-x)} ,$$

puis :

$$|u_n| \leq |L - f(x)| + (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{M_n}{n(1-x)} \ .$$

5. On choisit, pour n non nul, $x = 1 - \frac{1}{n}$. Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) tend vers 0.

6. Construire une suite (b_n) telle que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ait une limite finie quand x tend vers 1^- , mais telle que la série $\sum b_n$ diverge.
