On désigne par E l'espace vectoriel des suites réelles.

Si une suite $u=(u_n)$ est un élément de E, on dit que u est *positive* (et on note $u \geq 0$) si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Pour toute suite $u=(u_n)$ élément de E, on définit sa *suite dérivée* u' par :

$$u' = (u_{n+1} - u_n) .$$

On définit de même la suite *dérivée seconde* u'' par :

$$u'' = (u')' = (u'_{n+1} - u'_n) = (u_{n+2} - u_{n+1} - u_{n+1} + u_n) = (u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n) ,$$

et plus généralement par récurrence, pour tout entier $k \geq 2$, la suite dérivée d'ordre k, $u^{(k)}$, par :

$$u^{(k)} = (u^{(k-1)})' .$$

1. Généralités

a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur sa suite dérivée pour qu'une suite $u \in E$ soit croissante.

b. Quelles sont les suites de dérivée nulle ?

c. Quelles sont les suites dont la dérivée seconde est nulle ?

d. Étant donnée une suite v de E, existe-t-il une suite u de E vérifiant $u' = v$?
Si oui, déterminer *toutes* les suites u telles que $u' = v$.

e. Étant donnée une suite u de E, calculer le terme d'ordre n de sa suite dérivée troisième u''' .
Postuler, puis démontrer, l'expression du terme d'ordre n de sa suite dérivée d'ordre k .

2. Suites convexes

On dit d'une suite $u=(u_n)$ élément de E qu'elle est *convexe* si sa suite dérivée seconde u'' est positive.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur sa suite dérivée pour qu'une suite $u \in E$ soit convexe.

b. En déduire qu'une suite convexe est soit monotone, soit décroissante puis croissante. Qu'en conclure quant au comportement à l'infini d'une suite convexe ?

c. Soit $u=(u_n)$ une suite convexe ayant une limite finie. Prouver que u est décroissante.

3. Liens entre le comportement d'une suite et celui de l'une de ses dérivées

a. Soit $u=(u_n)$ une suite de E dont la suite dérivée u' tend vers 0. peut-on affirmer que la suite u converge ?

b. Soit $u=(u_n)$ une suite de E dont la suite dérivée u' possède une limite finie ℓ .

Prouver que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ converge vers ℓ . Que peut-on en déduire dans le cas particulier où $\ell \neq 0$?

c. Soit (x_n) une suite de réels possédant une limite finie a. Prouver, en adaptant la preuve du théorème de Cesàro, que l'on a :

$$\lim_n \frac{x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n}{1 + 2 + \ldots + n} = a .$$

Déterminer alors la valeur de $\lim\limits_n \dfrac{x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n}{n^2}$.

d. Soit maintenant une suite $u=(u_n)$ de E dont la suite dérivée seconde u'' possède une limite finie ℓ .

Prouver grâce à la question précédente que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n^2}\right)$ converge vers $\dfrac{\ell}{2}$.

4. <u>Transformation d'Abel</u>

Soient (u_n) et (ε_n) deux suites réelles. On pose $\forall\, n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a. En écrivant $u_k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \geq 1$, prouver que $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k u_k = \varepsilon_n S_n - \varepsilon_1 S_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) S_k$.

b. À quel résultat très classique cette identité vous fait-elle penser ?

5. <u>Suites fortement croissantes</u>

Une suite u de E est dite « fortement croissante » si u ainsi que toutes ses suites dérivées sont des suites positives.

a. Prouver que la suite (n^3) est fortement croissante.

b. La suite $(u_n) = (n^{3/2})$ est-elle fortement croissante ?

c. Soit ρ un réel strictement plus grand que 1. Prouver que la suite géométrique (ρ^n) est fortement croissante.

d. Soit P un polynôme à coefficients réels positifs. On envisage la suite $u = \big(P(n)n!\big)$. Prouver que sa suite dérivée est de la forme $u' = \big(Q(n)n!\big)$ où Q un polynôme à coefficients réels positifs.

En déduire que la suite $(n!)$ est fortement croissante.

6. <u>Suites dont une dérivée est nulle</u>

a. Soit Q un polynôme à coefficients réels, de degré p, et u la suite définie par $u = \big(Q(n)\big)$.

Prouver que la suite u' est de la forme $u' = \big(R(n)\big)$ où R est un polynôme de degré inférieur ou égal à $p-1$.

b. Prouver alors par récurrence sur k la propriété $H(k)$ suivante :

$H(k)$: pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à k, la suite $u = \big(P(n)\big)$ vérifie $u^{(k+1)} = 0$.

c. Soit réciproquement une suite $u = (u_n)$ de E telle qu'il existe un entier p tel que $u^{(p+1)} = 0$.

Prouver, par récurrence sur p, l'existence d'un polynôme P, de degré inférieur ou égal à p, tel que $u = \big(P(n)\big)$.

7. <u>« Inégalité des accroissements finis »</u>

Soient deux suites u et v de E telles que $|u'| \leq v'$, c'est à dire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - u_n| \leq v_{n+1} - v_n$.

a. Prouver que : $\forall p, q \in \mathbb{N},\ p \geq q \Rightarrow |u_p - u_q| \leq v_p - v_q$.

On suppose dans la suite que la suite v est convergente et l'on se propose de prouver que la suite u l'est aussi.

b. Prouver que la suite u est bornée.

c. Soit $a = \lim u_{\varphi(n)}$ une valeur d'adhérence de la suite u.

Justifier l'existence de a et prouver que $\lim_n |u_{\varphi(n)} - u_n| = 0$.

d. Conclure.

8. <u>Sous-espaces de dimension finie stables par la dérivation (5/2)</u>

Soit F un sous-espace vectoriel de E supposé de dimension finie et tel que $u \in F \Rightarrow u' \in F$.

a. Prouver que l'application $d : \begin{cases} F \to F \\ (u_n) \mapsto (u_{n+1}) \end{cases}$ définit un endomorphisme de F.

b. En déduire que les éléments de F satisfont tous à une même formule de récurrence linéaire du type :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = a_{p-1} u_{n+p-1} + \ldots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n \,.$$