Partie I

On désigne par φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on envisage l'équation différentielle :

$$(E) : y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0 .$$

On suppose dans cette partie que φ est paire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une solution y de (E) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que la fonction $x \mapsto y(-x)$ est aussi une solution de (E).

Si y est une solution de (E), alors y est de classe $\mathcal{C}^2$ *et* $y'' = -qy$ *. La fonction q étant de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *,* y'' *est à sont tour de classe* $\mathcal{C}^2$ *, y est donc de classe* $\mathcal{C}^4$ *. Par récurrence, on prouve alors facilement que y est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *.*

Posons $z(x) = y(-x)$ *. Alors* $z'(x) = y''(-x) = -\varphi(-x)y(-x) = -\varphi(x)z(x)$ *: z est solution de (E).*

2. **a.** Justifier l'existence et l'unicité de deux solutions de (E), notées f_0 et f_1, vérifiant les conditions :

$$f_0(0) = 1 \quad ; \quad f_0{}'(0) = 0 \quad ; \quad f_1(0) = 0 \quad ; \quad f_1{}'(0) = 1 .$$

Ce n'est pas autre chose que le théorème de Cauchy.

b. Prouver grâce à la question **1.** que la fonction f_0 est paire et la fonction f_1 impaire.

Si l'on pose $g_0(x) = f_0(-x)$ *, alors* g_0 *est une solution de (E) qui prend même valeur et même dérivée que* f_0 *en 0. Par unicité,* $f_0 = g_0$ *:* f_0 *est paire. On raisonne de même pour prouver l'imparité de* f_1 *.*

3. On suppose que f_0 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et l'on pose $u = \dfrac{f_1}{f_0}$.

a. Montrer que la fonction u' ne s'annule pas, et exprimer $\dfrac{u''}{u'}$ en fonction de $\dfrac{f_0{}'}{f_0}$.

$u' = \dfrac{f_1{}'f_0 - f_1f_0{}'}{f_0{}^2}$ *: le numérateur n'est autre que le wronskien de* f_0 *et de* f_1*, il ne s'annule donc pas puisque ces deux solutions sont linéairement indépendantes (c'est clair vues les conditions qu'elles remplissent en 0). En dérivant* u' *, on trouve :*

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{(f_1{}''f_0 + f_1{}'f_0{}' - f_1{}'f_0{}' - f_1f_0{}'')f_0 - 2f_0{}'f_0(f_1{}'f_0 - f_1f_0{}')}{f_0{}^4} \\ &= \frac{(-\varphi f_1f_0 + \varphi f_1f_0\ )f_0 - 2f_0{}'f_0(f_1{}'f_0 - f_1f_0{}')}{f_0{}^4} \\ &= \frac{-2f_0{}'f_0(f_1{}'f_0 - f_1f_0{}')}{f_0{}^4}, \end{aligned}$$

d'où $\dfrac{u''}{u'} = -2\dfrac{f_0{}'}{f_0}$.

b. En déduire qu'il existe une constante B, que l'on calculera, telle que $u' = \dfrac{B}{f_0^2}$.

On primitive l'égalité précédente et on obtient $\ln\left|u'\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|f_0\right| + cte$ *, d'où* $\left|u'\right| = \frac{a}{f_0^{\,2}}$ *où a est une constante positive. Mais* u' *étant continue et ne s'annulant pas, elle est de signe constant. Il vient donc* $u' = \frac{B}{f_0^{\,2}}$ *avec* $B = \pm a$ *suivant le signe de* u'. *Reste à évaluer en 0 pour obtenir* $B = u'(0) = 1$.

c. On note u_0 la primitive de $\frac{1}{f_0^2}$ qui s'annule en 0. Exprimer f_1 en fonction de f_0 et de u_0 .

Comme $u(0) = 0$ *, il vient en intégrant l'égalité précédente* $u = u_0$ *et donc* $f_1 = f_0 u_0$.

4. Dans cette question, $\varphi(x) = -(1 + x^2)$ pour tout réel x.

a. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme e^z où z est une fonction que l'on déterminera.

Si $y = \mathrm{e}^z$ *, il vient* $y'' = (z'' + z'^2)\mathrm{e}^z$. *On veut donc* $y'' = (z'' + z'^2)\mathrm{e}^z = (1 + x^2)\mathrm{e}^z$ *et il est clair que* $z' = x$ *convient : la fonction* $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ *est solution de (E).*

b. Résoudre complètement l'équation différentielle (on ne cherchera pas à calculer l'intégrale rencontrée).

On vient de trouver une solution de (E) qui ne s'annule pas, c'est tout ce qu'il faut pour utiliser la méthode de Lagrange. On pose donc $z = y\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ *et l'on calcule les dérivées de y en fonction de celles de z pour remplacer dans l'équation (E). Tous calculs faits (ils ne sont pas bien durs !), l'équation différentielle vérifiée par z s'écrit :* $2xz' + z'' = 0$ *, d'où l'on tire* $z' = a\mathrm{e}^{-x^2}$ *puis* $z = a\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t + b$. *Finalement, la solution générale de (E) est donc :*

$$y = a\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t + b\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} .$$

5. On choisit dans cette question $\varphi(x) = \frac{3}{(x^2+1)^2}$, de sorte que (E) s'écrit : $y''(x) + \frac{3}{(x^2+1)^2}y(x) = 0$.

a. On pose $u(x) = y(x)\sqrt{x^2+1}$, ou encore $y(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

Vérifier que u est solution de l'équation différentielle $(\#)$: $(x^2+1)u'' - 2xu' + 2u = 0$.

C'est juste un calcul, certes un peu fastidieux, mais tout à fait à la portée d'un élève de MP !

b. Donner les degrés possibles d'éventuelles solutions polynomiales de l'équation différentielle $(\#)$, puis en donner deux solutions polynomiales.

Soit u une éventuelle solution polynomiale de degré n. On peut toujours supposer u unitaire puisque l'équation est homogène. Alors le coefficient de x^n *dans* $(x^2+1)u'' - 2xu' + 2u$ *est* $n(n-1) - 2n + 2$ *, soit* $n^2 - 3n + 2$. *Ce coefficient n'est nul que si* $n = 1$ ou 2 . *Soit donc inversement le polynôme* $ax^2 + bx + c$. *On injecte dans l'équation vérifiée par u et l'on voit que ce polynôme est solution de (#) si et seulement si* $c = 0$. ***Attention alors à la manière de conclure !*** *On a trouvé* ***des*** *solutions, les fonctions de la forme* $ax^2 + bx$ *, et celles-ci forment un espace vectoriel de dimension 2. On a donc trouvé* ***toutes*** *les solutions de (#) puisque celles-ci forment aussi un espace de dimension 2. Finalement, la solution générale de (E) s'écrit :*

$$y = \frac{ax^2 + bx}{\sqrt{x^2+1}} .$$

Partie II

On envisage dans cette partie l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2y'' + (x^2+1)y = 0 .$$

5. **a.** Peut-on affirmer l'existence d'une solution S de (E) définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant $S(1)=0,\ S'(1)=1$?

Oui, c'est le théorème de Cauchy appliqué à l'équation différentielle (E) présentée sous la forme $y''+(1+\dfrac{1}{x^2})y=0$.

b. Peut-on affirmer l'existence d'une solution T de (E) définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $T(0)=0,\ T'(0)=1$?

Non le théorème de Cauchy ne s'applique pas sur $\mathbb{R}$ *car la fonction* $x\mapsto 1+\dfrac{1}{x^2}$ *n'y est pas continue.*

6. Prouver que la seule solution de (E) développable en série entière autour de 0 est la fonction nulle.

Soit $\sum a_nx^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R\neq 0$ *, et* $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ *pour* $x\in]-R,R[$ *. Alors g est solution de (E) sur* $]-R,R[$ *si et seulement si :*

$$\forall\, x\in]-R,R[,\ x^2\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+(x^2+1)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2-n+1)a_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x\in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n^2-n+1)a_nx^n+\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-2}x^n=0$$

$$\Leftrightarrow \forall\, x\in]-R,R[,\ a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{+\infty}((n^2-n+1)a_n+a_{n-2})x^n=0$$

$\Leftrightarrow$ (par unicité du développement en série entière) :

$$a_0=0,\ a_1=0 \text{ et } \forall\, n\geq 2\ (n^2-n+1)a_n+a_{n-2}=0$$

$\Leftrightarrow \forall\, n\in\mathbb{N},\ a_n=0$.

On désigne désormais par S la solution de (E) *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *vérifiant* $S(1)=0$ et $S'(1)=1$.

7. On pose, pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, $E(x)=S'^2(x)+(1+\dfrac{1}{x^2})S^2(x)$.

a. Prouver que la fonction E décroît sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x>0$ *, on a* $E'(x)=2S'(x)S''(x)+2(1+\dfrac{1}{x^2})S'(x)S''(x)-\dfrac{2}{x^3}S^2(x)=-\dfrac{2}{x^3}S^2(x)<0$.

b. En déduire que S est bornée sur $[1,+\infty[$.

Il vient donc, pour $x>1$ *,* $E(1)\geq E(x)=S'^2(x)+(1+\dfrac{1}{x^2})S^2(x)\geq S^2(x)$ *: S est bornée sur* $[1,+\infty[$.

8. f et g désignent ici deux fonctions numériques continues sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in I,\ f(x) > g(x)$. On note u_1 et u_2 des solutions respectives des équations différentielles $(E_1)\ :\ y'' + f(x)y = 0$ et $(E_2)\ :\ y'' + g(x)y = 0$.

On suppose que x_1 et x_2 sont deux annulations consécutives de la fonction u_2 sur I, donc que l'on a $x_1 < x_2$, $u_2(x_1) = u_2(x_2) = 0$ et, pour fixer les idées, on supposera que $\forall x \in]x_1, x_2[,\ u_2(x) > 0$.

On suppose enfin que u_1 ne s'annule pas sur $J =]x_1, x_2[$.

Observons tout d'abord que les équations étant homogènes, l'opposée d'une solution est encore solution. Il n'y a donc aucune restriction à supposer que u_1 *et* u_2 *sont à valeurs strictement positives sur* $J =]x_1, x_2[$.

a. On définit sur I la fonction $D = u_1 u_2' - u_1' u_2$. Étudier les variations de D sur J.

$D' = u_1' u_2' + u_1 u_2'' - u_1'' u_2 - u_1' u_2' = u_1 u_2'' - u_1'' u_2 = (f - g) u_1 u_2$. *$D$ est donc strictement croissante sur* $[x_1, x_2]$.

b. Trouver une impossibilité, et en déduire que u_1 s'annule sur J.

$D(x_1) = u_1(x_1) u_2'(x_1)$, *or* $u_1(x_1) \geq 0$ *et* $u_2'(x_1) \geq 0$ *(la deuxième inégalité résulte de ce que* u_2 *étant positive sur* $[x_1, x_2]$, *on ne peut avoir* $u_2'(x_1) < 0$ *(dessin !). Bref,* $D(x_1) \geq 0$. *Les mêmes arguments prouvent que* $D(x_2) \leq 0$. *Or il est strictement interdit à une fonction de croître strictement d'un machin positif à un bidule négatif !*

c. Prouver que si x et y sont deux annulations consécutives d'une solution non nulle v de (E_2), toute solution de (E_1) s'annule entre x et y.

On vient de voir que la fonction u_1 *ne peut rester de signe constant entre deux annulations consécutives de* u_2 *. Étant continue, elle doit s'annuler.*

9. **a.** Rappeler l'expression de la solution générale de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

Difficile ! $y = a\cos x + b\sin x$, *ou* $y = A\cos(x - \varphi)$, *ou* $y = A\sin(x - \varphi)$.

b. Expliciter, pour tout $a > 0$, une solution de l'équation $y'' + y = 0$ qui s'annule en a et en $a + \pi$.

$y = \sin(x - a)$ *convient parfaitement !*

c. Prouver, en utilisant le résultat de la question **4.**, que la fonction S s'annule sur tout segment de la forme $[a, a + \pi]$ avec $a > 0$.

*On applique le résultat de la question **8.** avec* $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$ *et* $g(x) = 1$. *On a bien* $f(x) > g(x)$ *pour tout* $x > 0$, $\sin(x - a)$ *est solution de* $y'' + gy = 0$ *et a et* $a + \pi$ *en sont deux annulations consécutives. S, qui est une solution de* $y'' + fy = 0$, *s'annule donc sur* $[a, a + \pi]$.

10. Soit g une fonction continue sur $[1, +\infty[$, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. On considère l'équation différentielle $(E_g) : y'' + y = g$.

a. Prouver que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos t\, g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin t\, g(t)\,\mathrm{d}t$ sont absolument convergentes.

Parfaitement immédiat en majorant le cosinus ou le sinus par 1.

b. Sous quelle forme la méthode de variation des constantes donne-t-elle la solution générale de l'équation différentielle (E_g) ? En déduire que la solution générale de (E_g) peut s'écrire :

$$y(x)=\int_x^{+\infty}\sin(t-x)g(t)\mathrm{d}t+\alpha\cos x+\beta\sin x\,,$$

La méthode de variations des constantes conduit à chercher les solutions sous la forme $y=\lambda\cos x+\mu\sin x$ *où* λ *et* μ *sont deux fonctions dérivables vérifiant :*

$$\begin{cases}\lambda'\cos x+\mu'\sin x=0\\ -\lambda'\sin x+\mu'\cos x=g\end{cases}.$$

La résolution de ce système donne $\lambda'=-\sin x\,g(x)$ *et* $\mu'(x)=\cos x\,g(x)$. *Maintenant se pose le problème du choix des bornes d'intégration. Étant donnée la formule à laquelle on souhaite arriver ainsi que ce qui est demandée à la question précédente, il semble pertinent de choisir* $\lambda=\int_x^{+\infty}\sin t\,g(t)\,\mathrm{d}t+a$ *et* $\mu=-\int_x^{+\infty}\cos t\,g(t)\,\mathrm{d}t+b$ *ce qui conduit à :*

$$\begin{aligned}y&=\cos x\int_x^{+\infty}\sin t\,g(t)\,\mathrm{d}t-\sin x\int_x^{+\infty}\cos t\,g(t)\,\mathrm{d}t+a\cos x+b\sin x\\&=\int_0^x\sin(t-x)\,g(t)\,\mathrm{d}t+a\cos x+b\sin x.\end{aligned}$$

où a et b sont deux constantes réelles.

d. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\sin(t-x)g(t)\mathrm{d}t=0$.

$$\left|\int_x^{+\infty}\sin(t-x)g(t)\mathrm{d}t\right|\le\int_x^{+\infty}\left|g(t)\right|\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left|g(t)\right|\mathrm{d}t-\int_0^{x}\left|g(t)\right|\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

11. **a.** Prouver que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{S(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

On a vu que S était bornée sur $[1,+\infty[$, *on peut donc écrire* $\left|\frac{S(t)}{t^2}\right|\le\frac{M}{t^2}$ *et l'intégrale* $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ *converge.*

b. En déduire l'existence de deux constantes réelles α et β telles que $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(S(x)-\alpha\cos x-\beta\sin x\big)=0$.

Transformons un chouïa l'équation différentielle vérifiée par S pour pouvoir appliquer ce qui précède. En fait, S est aussi solution sur $\mathbb{R}_+^*$ *de l'équation différentielle* $y''+y=-\frac{S(x)}{x^2}$. *Alors, si l'on pose* $g(t)=-\frac{S(t)}{t^2}$, *l'intégrale* $\int_1^{+\infty}\left|g(t)\right|\mathrm{d}t$ *converge d'après **11.a.**.*

*La question **10.b.** permet alors d'écrire* $S(x)=\int_x^{+\infty}\sin(t-x)g(t)\mathrm{d}t+\alpha\cos x+\beta\sin x$ *et donc :*

$$S(x)-\alpha\cos x-\beta\sin x=\int_x^{+\infty}\sin(t-x)g(t)\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0\quad\textit{(d'après \textbf{10.d.})}.$$