Partie I

On désigne par φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on envisage l'équation différentielle :

$$(E) : \ y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0\,.$$

On suppose dans cette partie que φ est paire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit y est une solution de (E) sur I. Montrer y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que la fonction $x \mapsto y(-x)$ est aussi une solution de (E).

2. **a.** Justifier l'existence et l'unicité de deux solutions de (E), notées f_0 et f_1, vérifiant les conditions suivantes :

$$f_0(0) = 1 \quad ; \quad f_0{}'(0) = 0 \quad ; \quad f_1(0) = 0 \quad ; \quad f_1{}'(0) = 1\,.$$

b. Prouver grâce à la question **1.** que la fonction f_0 est paire et la fonction f_1 impaire.

3. On suppose que f_0 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et l'on pose $u = \dfrac{f_1}{f_0}$.

a. Montrer que la fonction u' ne s'annule pas, et exprimer $\dfrac{u''}{u'}$ en fonction de $\dfrac{f_0{}'}{f_0}$.

b. En déduire qu'il existe une constante B, que l'on calculera, telle que $u' = \dfrac{B}{f_0^2}$.

c. On note u_0 la primitive de $\dfrac{1}{f_0^2}$ qui s'annule en 0. Exprimer f_1 en fonction de f_0 et de u_0.

4. Dans cette question, $\varphi(x) = -(1+x^2)$ pour tout réel x.

a. Chercher une solution particulière de l'équation différentielle sous la forme e^z où z est une fonction que l'on déterminera.

b. Résoudre complètement l'équation différentielle (on ne cherchera pas à calculer l'intégrale rencontrée).

Partie II

On envisage dans cette partie l'équation différentielle suivante :

$$(E) : x^2y'' + (x^2+1)y = 0\,.$$

5. **a.** Peut-on affirmer l'existence d'une solution S de (E) définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant $S(1) = 0$, $S'(1) = 1$?

b. Peut-on affirmer l'existence d'une solution T de (E) définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $T(0) = 0$, $T'(0) = 1$?

6. Prouver que la seule solution de (E) développable en série entière autour de 0 est la fonction nulle.

On désigne désormais par S la solution de (E) définie sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $S(1)=0$ et $S'(1)=1$ *. Pour éviter de voir massacrées des évidences, je me sens obligé de signaler que l'équation différentielle (E) peut aussi s'écrire* $y''+(1+\frac{1}{x^2})y=0$ *… (!!!).*

7. On pose, pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, $E(x)=S'^2(x)+(1+\frac{1}{x^2})S^2(x)$.

a. Prouver que la fonction E décroît sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. En déduire que S est bornée sur $[1,+\infty[$.

8. f et g désignent ici deux fonctions numériques continues sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x\in I,\ f(x)>g(x)$. On note u_1 et u_2 des solutions respectives des équations différentielles $(E_1)\ :\ y''+f(x)y=0$ et $(E_2)\ :\ y''+g(x)y=0$.

On suppose que x_1 et x_2 sont deux annulations consécutives de la fonction u_2 sur I, donc que l'on a $x_1<x_2$, $u_2(x_1)=u_2(x_2)=0$ et, pour fixer les idées, on supposera que $\forall x\in\,]x_1,x_2[,\ u_2(x)>0$.

On suppose enfin que u_1 ne s'annule pas sur $J=\,]x_1,x_2[$.

a. On définit sur I la fonction $D=u_1u_2'-u_1'u_2$. Étudier les variations de D sur J.

b. Trouver une impossibilité, et en déduire que u_1 s'annule sur J.

c. Prouver que si x et y sont deux annulations consécutives d'une solution non nulle v de (E_2), toute solution de (E_1) s'annule entre x et y.

9. **a.** Rappeler l'expression de la solution générale de l'équation différentielle $y''+y=0$.

b. Expliciter, pour tout $a>0$, une solution de l'équation $y''+y=0$ qui s'annule en a et en $a+\pi$.

c. Prouver, en utilisant le résultat de la question **4.**, que la fonction S s'annule sur tout segment de la forme $[a,a+\pi]$ avec $a>0$.

10. Soit g une fonction continue sur $[1,+\infty[$, telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\left|g(t)\right|\mathrm{d}t$ converge. On considère l'équation différentielle $(E_g)\ :\ y''+y=g$.

a. Prouver que les intégrales $\int_1^{+\infty}\cos t\,g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty}\sin t\,g(t)\,\mathrm{d}t$ sont absolument convergentes.

b. Sous quelle forme la méthode de variation des constantes donne-t-elle la solution générale de l'équation différentielle (E_g) ?

c. En déduire que la solution générale de (E_g) peut s'écrire :

$$y(x)=\int_x^{+\infty}\sin(t-x)g(t)\mathrm{d}t+\alpha\cos x+\beta\sin x\ ,$$

où α et β sont deux constantes réelles.

d. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\sin(t-x)g(t)\mathrm{d}t=0$.

11. **a.** Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{S(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

b. En déduire l'existence de deux constantes réelles α et β telles que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(S(x) - \alpha\cos x - \beta \sin x\big) = 0$.

On a donc prouvé que la fonction S possède à l'infini un comportement sinusoïdal.

Partie III

Dans cette partie, on désigne par U l'ouvert suivant de $\mathbb{R}^2$: $U =]0,1[\times]0,+\infty[$, et par $\overline{U} = [0,1]\times[0,+\infty[$ son adhérence. On désigne par c une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ *fixée dans toute la partie*. On appelle *solution* du problème $\mathcal{DP}$ une fonction numérique f, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, se prolongeant à $\overline{U}$ en une fonction continue, et vérifiant les conditions (1), (2) et (3) suivantes :

$$\begin{array}{lll} (1) & : & \forall (x,t)\in U, \quad \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad ; \\ (2) & : & \forall t \geq 0, \quad f(0,t) = f(1,t) = 0 \quad ; \\ (3) & : & \forall x \in [0,1], \quad f(x,0) = c(x). \end{array}$$

L'objectif de cette partie est de prouver l'existence et l'unicité d'une solution au problème $\mathcal{DP}$, et d'expliciter cette solution sous forme d'une série.

12. **a.** Soit a un réel positif. À quelle condition sur le réel la fonction $(x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-at}\sin \omega x$ est-elle solution sur U de l'équation aux dérivées partielles (1) ?

b. À quelles conditions sur a et sur la fonction $(x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-at}\sin\omega x$ vérifie-t-elle les conditions (1) et (2) ? Que vaut alors $f(x,0)$ pour $x\in[0,1]$?

13. **On admet** (c'est un résultat issu de la théorie de Fourier) l'existence d'une suite de réels (b_n) telle que :

$$i.\ \forall x\in[0,1], \quad c(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\pi x \ ;$$

ii. la série $\sum b_n$ converge absolument.

a. On pose, pour $(x,t)\in\overline{U}$, $g(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x$.

Prouver que la fonction g est bien définie sur $\overline{U}$ et qu'elle y est continue.

Montrer que la fonction g vérifie les conditions (2) et (3).

b. Justifier qu'à x fixé, la fonction $t\mapsto g(x,t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de la variable t sur $]0,+\infty[$, et calculer sa dérivée (donc la dérivée partielle de g par rapport à t).

On admettra que, de la même façon, on peut dériver deux fois g sous le signe Σ *par rapport à x.*

c. Conclure.

14. Soient f_1 et f_2 deux solutions du problème $\mathcal{DP}$, et $f = f_1 - f_2$.

a. Montrer que f vérifie les conditions (1) et (2), et calculer $f(x,0)$ pour $x\in[0,1]$.

b. On pose, pour $t>0$, $I(t) = \displaystyle\int_0^1 f^2(x,t)\mathrm{d}x$.

c. Prouver que I décroît sur $[0,+\infty[$.

d. Prouver que $I=0$ et conclure.