La première partie de ce problème établit un lemme précisant le comportement d'une série entière au bord de son disque de convergence. Les parties **II.**, **III.** et **IV.** suivantes, indépendantes les unes des autres, utilisent ce lemme. Il est possible de les aborder sans avoir traité la partie **I.** en utilisant le résultat encadré.

I. Un lemme important

On se propose d'établir le résultat suivant, dont on donnera plusieurs applications dans la suite du problème :

> Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels telles que : $a_n \underset{\infty}{\sim} b_n$, la série $\sum b_n$ est une série divergente à termes positifs, et la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1. Alors :
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

Soient $\sum \alpha_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières réelles. On suppose :

i. que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$ est égal à 1 ;

ii. que la série $\sum b_n$ est une série divergente à termes positifs ;

iii. que $\alpha_n = \mathrm{o}(b_n)$ (c'est-à-dire que α_n est négligeable devant b_n quand n tend vers l'infini).

1. Prouver que $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = +\infty$ (indication : on pourra, étant donné un réel positif A, justifier l'existence d'un entier N tel que $\sum_{n=0}^{N} b_n \geq A$, et en déduire une minoration de $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n$, puis de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, pour x assez proche de 1).

2. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum \alpha_n x^n$?

3. On fixe un réel strictement positif.

a. Prouver l'existence d'un entier N *indépendant de* x tel que :

$$\forall x \in [0,1[,\ \left|\sum_{k=N}^{\infty} \alpha_k x^k\right| \leq \varepsilon \sum_{k=N}^{\infty} b_k x^k .$$

b. Prouver, grâce à la question **1.**, l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [1-\alpha, 1[,\ \left|\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k x^k\right| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k .$$

c. En déduire, en achevant correctement l'epsilonnage, que au voisinage de 1^-, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = \mathrm{o}\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$

4. On se donne maintenant une suite (a_n) de réels telle que $a_n \underset{\infty}{\sim} b_n$ (c'est-à-dire que les suites (a_n) et (b_n) sont équivalentes quand n tend vers l'infini).

a. Que vaut le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$?

b. Prouver en utilisant ce qui précède que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

II. Étude de la série entière $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

5. Que vaut le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$?

6. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ (exprimer les coefficients avec des factorielles).

7. En utilisant la formule de Stirling, donner un équivalent simple au voisinage de 1^- de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

III. Étude de la série entière $\sum x^{2^n}$

8. Étudier la convergence de la *suite* (z^{2^n}) quand le complexe z est de module différent de 1.

9. On fixe ici un complexe z de module égal à 1. On posera $u_n = z^{2^n}$.

a. Quelle formule de récurrence très simple vérifie la suite (u_n) ? En déduire que 1 est la seule limite possible de cette suite.

b. On suppose que u_n est différent de 1 pour tout n. Prouver dans ce cas que si la suite (u_n) tend vers 1, alors $\left|\frac{u_{n+1}-1}{u_n - 1}\right|$ tend vers 2. Conclure à une impossibilité.

c. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z de module 1 pour que la suite (u_n) soit convergente.

10. Que vaut le rayon de convergence R de la série entière $\sum x^{2^n}$?

On pose désormais, pour x réel élément de $]-R,R[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n}$.

11. On définit une suite (a_p) par : $\begin{cases} a_p = 1 & \text{si } p \text{ est une puissance de 2 ;} \\ a_p = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ainsi, il est possible d'écrire, pour tout réel x de $]-R,R[$, $F(x)=\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p$. On remarquera également que pour tout entier non nul n, $\sum_{p=0}^{n} a_p$ peut être vu comme le nombre de puissances de 2 inférieures ou égales à n.

a. Prouver que pour tout entier non nul n, $\sum_{p=0}^{n} a_p = \left[\frac{\ln n}{\ln 2}\right]+1$ ([ ] désigne la partie entière).

b. Donner un équivalent simple, quand n tend vers l'infini, de $\sum_{p=0}^{n} a_p$.

12. Développer en série entière les fonctions $\frac{1}{(1-x)^2}$, $\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ et $\frac{F(x)}{1-x}$.

13. Prouver que quand n tend vers l'infini, $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \sim \ln n$.

14. Déduire des questions précédentes un équivalent simple de $F(x)$ au voisinage de 1^-.

15. Valeur approchée de $F(0{,}9)$

a. Prouver que pour tout entier n supérieur ou égal à 6, on a $2^n \geq 10n$.

b. En déduire une valeur approchée de $F(0{,}9)$ à 10^{-2} près.

IV. Continuité au bord

(a_n) désigne une suite de réels. On pose, pour tout entier n, $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$, et on suppose que la série $\sum a_n$ est convergente de somme S de sorte que la suite (S_n) converge vers S. On supposera $S \neq 0$.

16. Prouver que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1. On note S_a sa somme.

17. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum S_n x^n$, exprimer quand c'est possible sa somme en fonction de $S_a(x)$, et donner un équivalent en 1^- de $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$.

18. En déduire la limite de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ quand x tend vers 1^-.

Prouver que ce résultat reste vrai si $S=0$.