DÉRIVATION

1. On se donne une fonction f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable.

a. Que peut-on dire de f' si f est paire, impaire, périodique ?

b. Que peut-on dire de f si f' est paire, impaire, périodique ?

c. Soit a un réel en lequel $f'(a) \neq 0$. Prouver l'existence d'un voisinage V de a tel que pour tout x de V, x différent de a, on ait $f(x) \neq f(a)$.

On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Prouver l'existence d'un voisinage V de a tel que la restriction de f à V soit injective.

---

2. La fonction $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ? de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$?

Pour les 5/2 : cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$?

---

3. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

a. Calculer, pour tout entier k, les dérivées d'ordre k des fonctions g et h sur leur ensemble de définition.

b. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$. En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée n-ième d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et tout réel $x \neq -1$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

c. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz utilisée à la question précédente.

---

4. Soit f une fonction numérique continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$, et possédant une limite à l'infini égale à $f(a)$. Prouver l'existence d'un élément c de $]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$ (on considèrera la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(a + \dfrac{x}{1-x})$ si $x \neq 1$ et $g(1) = ???$.

---

5. **a.** Énoncer les théorèmes des accroissements finis (inégalité et égalité).

b. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a,b[$. On suppose f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b]$ sauf peut-être en x_0. Démontrer que si f' admet une limite en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

c. Prouver que l'implication (f dérivable en x_0) $\Rightarrow$ (f' possède une limite en x_0) est fausse (*indication* : on pourra considérer la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$).

---

6. Soit f une fonction numérique dérivable sur $[a,b]$, vérifiant $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Prouver que f n'atteint son minimum ni en a ni en b, et en déduire l'existence d'un réel c tel que $f'(c) = 0$. En déduire qu'une dérivée a la propriété des valeurs intermédiaires (Théorème de Darboux).

---

7. Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. On suppose que f s'annule $n+1$ fois. Prouver, en utilisant une fonction auxiliaire, que la fonction $f + f'$ s'annule n fois (au moins).

b.*On suppose que la fonction $f + f'$ tend vers 0 en $+\infty$. Prouver que f tend vers 0 en $+\infty$ (on utilisera la même fonction auxiliaire qu'à la question **a.**).

8.* Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que f' possède une limite finie ℓ en $+\infty$. Prouver que $\dfrac{f(x)}{x}$ possède une limite en $+\infty$ égale à ℓ (on pourra commencer par le cas où $\ell = 0$). Généraliser au cas où f est numérique et l est infini.

9. **a.** Étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]1,+\infty[$.

b. En déduire que pour tout réel x de $]1,\mathrm{e}[$, il existe un unique y de $]\mathrm{e},+\infty[$ vérifiant $x^y = y^x$.

c. On note $y = \varphi(x)$. Prouver que l'application φ de $]1,\mathrm{e}[$ dans $]\mathrm{e},+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

d. Résoudre l'équation $x^y = y^x$ quand x et y sont des entiers distincts.

10. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, vérifiant $f(0) = 0$. Prouver que la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, convenablement prolongée en 0, est de classe $\mathcal{C}^1$.

11. <u>Théorème des accroissements finis généralisés, règle de L'Hospital</u>

a. Soient f et g deux fonctions numériques continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, g' ne s'annulant pas. Prouver, en adaptant la preuve de l'égalité des accroissements finis, l'existence d'un réel c de $]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

b. On suppose dans cette question les fonctions f et g continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivables sauf peut-être en un point a de I, g' ne s'annulant pas, et que la fonction $\dfrac{f'}{g'}$ possède une limite ℓ en a. Déterminer :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}.$$

c. <u>Application</u> : donner un équivalent au voisinage de 1 de $\arccos x$ puis de $\arccos x - \sqrt{1-x^2}$.

12. Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[a,b]$. On désigne par M un majorant de $F^{(3)}$ (?). Prouver que pour tout x de $[a,b]$, on a $\left\| F(x) - F(a) - \dfrac{x-a}{2}\big(F'(x)+F'(a)\big) \right\| \le M\dfrac{(x-a)^3}{12}$ (*indication :* on dérivera tant que possible la fonction $G(x) = F(x) - F(a) - \dfrac{x-a}{2}\big(F'(x)+F'(a)\big)$).

13. On fixe une fonction numérique f de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[-1,1]$. On posera $Q = X^2 - 1/3$, et $r = 1/\sqrt{3}$.

a. Soit E l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3. Prouver que l'application D, de E dans $\mathbb{R}^4$, qui à un polynôme P associe $\big(P(r),P(-r),P'(r),P'(-r)\big)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme L de E qui a les mêmes valeurs et les mêmes dérivées que f en r et $-r$.

b. On fixe t dans $[-1,1]$, différent de r et de $-r$, et on considère la fonction H définie sur $[-1,1]$ par :

$$H(u) = L(u) - f(u) + \frac{f(t)-L(t)}{Q(t)}Q(u).$$

Calculer $H(t), H(r), H(-r), H'(r)$ et $H'(-r)$, et en déduire l'existence d'un élément c de $[-1,1]$ tel que $H^{(4)}(c) = 0$.

c. Prouver, *pour tout* t de $[-1,1]$, l'existence d'un réel c tel que $f(t) - L(t) = \dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}Q(t)$.

14. **a.** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, convexe et positive. On suppose que f a deux zéros distincts a et b. Montrer que f est identiquement nulle entre a et b.

b. Soit c un nombre réel et soit f une fonction convexe et majorée sur l'intervalle $[c,+\infty[$. Pour d élément de $[c,+\infty[$, on considère la fonction τ définie sur $]d,+\infty[$ par $\tau(t)=\dfrac{f(t)-f(d)}{t-d}$.

Étudier la monotonie de τ, puis montrer que τ a une limite négative ou nulle en $+\infty$.

En déduire que f décroît sur $[c,+\infty[$.

c. Montrer que toute fonction convexe et majorée sur est constante.

d. On souhaite donner une autre preuve du résultat de la question **c.**, en supposant que f est dérivable.

Prouver que la fonction f' possède des limites (éventuellement infinies) en $+\infty$ et $-\infty$, et que si l'une de ces deux limites est non nulle, f n'est pas bornée. Conclure.

---

15. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction convexe.

a. On suppose que f tend vers 0 en $+\infty$. Prouver que f est positive.

b. Prouver que la somme de f et d'une fonction affine est convexe.

c. Prouver que si la courbe représentative de f possède une asymptote, alors elle est au-dessus de son asymptote.

---

16. **a.** Soient f et g deux fonctions convexes sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, $M=\sup(f,g)$, $m=\inf(f,g)$. M est-elle convexe ? Même question pour m.

b. Soient f et g deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$. La fonction $f\circ g$ est-elle convexe ? Si non, quelle hypothèse supplémentaire est-il naturel de faire ?

c. Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ possédant en un point a de I un minimum local. Prouver que ce minimum est global.

---

17. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On dit que f est logarithmiquement-convexe (en abrégé *l-cv*) si la fonction $\ln(f)$ est convexe.

a. Prouver qu'une fonction *l-cv* est convexe.

b. On suppose f deux fois dérivable sur I. Prouver que f est *l-cv* si et seulement si :

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ f(x)t^2+2f'(x)t+f''(x)\geq 0\,.$$

c. En déduire que la somme de deux fonctions *l-cv* est une fonction *l-cv*.

---

18. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a)=f(b)=0$. On note $M=\sup\limits_{t\in[a,b]}\left|f''(t)\right|$ et l'on définit deux fonctions g et h par :

$$g(x)=f(x)-M\frac{(x-a)(b-x)}{2}\quad\text{et}\quad h(x)=f(x)+M\frac{(x-a)(b-x)}{2}\,.$$

a. justifier l'existence de M.

b. Étudier la convexité des fonctions g et h.

c. Prouver pour tout x de $[a,b]$, on a $\left|f(x)\right|\leq M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$.

---

19. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction convexe continue. Prouver les inégalités :

$$(b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\leq\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\leq(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$