Fonction génératrice d'une variable aléatoire entière

I. Introduction

Définition

Soit X une variable entière (i.e à valeurs dans $\mathbb{N}$).
Puisque $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P(X=n)$ vaut 1, la série $\sum P(X=n)$ converge et la série entière $\sum P(X=n)z^n$ a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
La somme de cette série entière est appelée la fonction génératrice de X, G_X :

$$\forall t \in]-1,1], \quad G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$$

Remarquons les points suivants :

1e) $G_X(1) = 1$
2e) $\forall t \in]-1,1], G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right)$ (formule de transfert)
3e) Si l'on connaît la fonction génératrice d'une variable entière X, on connaît (par unicité du développement en série entière) les $P(X=n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, donc la loi de X.

Théorème

La loi d'une variable aléatoire entière est entièrement déterminée par la fonction génératrice de cette variable.

4e) La série entière définissant G_X est à coefficients réels positifs, ce qui induit des particularités.

II. Fonctions génératrices des variables usuelles

1e) Bernoulli

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $P(X=0) = 1-p$, $P(X=1) = p$.

$$\Rightarrow \; G_X(t) = pt + (1-p)$$

2e) Binomiale

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$\Rightarrow \; \forall t \in]-1,1], \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = \big(pt + (1-p)\big)^n$$

3e) Géométrique

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ \forall t \in]-1,1], \quad G_X(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} t^n \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} \big((1-p)t\big)^n \\
&= \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)t}{1-(1-p)t} \\
&= \frac{pt}{1-(1-p)t}
\end{aligned}$$

4e) Poisson

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $\forall t \in]-1,1]$,

$$\begin{aligned}
G_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!} t^n \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}
\end{aligned}$$

Fonction génératrice d'une somme Soient X et Y deux variables entières.

$$\forall t \in]-1,1], \quad G_{X+Y}(t) = \mathrm{E}\left(t^{X+Y}\right) = \mathrm{E}\left(t^X t^Y\right)$$

Si X et Y sont indépendantes, t^X et t^Y le sont, donc :

$$G_{X+Y}(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right)\mathrm{E}\left(t^Y\right) = G_X(t) \times G_Y(t)$$

Par récurrence, on en déduit :

Théorème

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables entières mutuellement indépendantes,

$$G_{X_1+\ldots+X_n} = G_{X_1} G_{X_2} \ldots G_{X_n}$$

III. Quelques résultats spécifiques aux séries entières à coefficients positifs

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière à coefficients réels positifs, supposée être de rdc supérieur ou égal à 1.
On s'intéresse ici au comportement de la somme de cette série entière au voisinage de 1.
On posera, pour $x \in]-1,1[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

De trois choses l'une :
Notons R le rdc de $\sum a_n z^n$.

- Si $R > 1$

  S a une limite finie en 1, égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ (continuité sur le disque ouvert de convergence).
- Si $R = 1$ et si $\sum a_n$ converge
  S eſt définie sur $]-1,1]$, mais le cours sur les séries entières ne dit pas que S eſt continue en 1.
  Mais :
  - $\forall n$, $x \longmapsto a_n x^n$ eſt continue en 1.
  - $\forall t \in]-1,1]$,
  $$|a_n t^n| \leqslant \underbrace{a_n}_{\text{série convergente ind}^{\text{te}} \text{ de } t}$$

  La série définissant S converge normalement sur $]-1,1]$, S eſt donc continue en 1.
- Si $R = 1$ et $\sum a_n$ diverge
  On va prouver dans ce cas que $\lim\limits_{x \to 1^-} S(x) = +\infty$.
  Soit $A > 0$:
  La série des a_n eſt divergente à termes positifs, ses sommes partielles tendent donc vers $+\infty$:
  $$\Rightarrow \ \exists N / \quad \sum_{n=0}^{N} a_n \geqslant A + 1$$
  Mais :
  $$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \xrightarrow[x \to 1^-]{} \sum_{n=0}^{N} a_n \geqslant A + 1$$
  Donc pour x assez voisin de 1,
  $$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \geqslant A$$
  A fortiori, par positivité des a_n, pour x assez voisin de 1 on aura :
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \geqslant A$$
  On a exaɑement prouvé que $\lim\limits_{x \to 1^-} S(x) = +\infty$.

Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière à coefficients positifs de rdc supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in]-1,1[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1er cas : si $\sum a_n$ converge, S a une limite finie en A égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

2e cas : si $\sum a_n$ diverge,
$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = +\infty$$

ex : On pose pour $x \in]-1,1[$,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

Le rdc vaut 1.
$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge et est à termes positifs.

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} S(x) = +\infty$$

IV. Retour aux fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire entière, de fonction génératrice G_X définie par :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Il s'agit bien d'une série entière de rdc $\geqslant 1$ et à coefficients positifs ; puisque $\sum P(X=n)$ converge et est de somme 1, G_X est continue en 1 et $G_X(1) = 1$.
Mais,

$$\forall t \in]-1,1[, \quad G'_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n)t^{n-1}$$

- Si X a une espérance, la série positive $\sum nP(X=n)$ converge, le théorème précédent dit que :

$$\lim_{t \to 1^-} G'_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) = \mathrm{E}(X)$$

  Alors le théoréme de la limite de la dérivée dit que G_X est dérivable en 1, de dérivée :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) = \mathrm{E}(X)$$

- Si X n'a pas d'esperance, la série positive $\sum nP(X=n)$ diverge.
  Alors, notre théorème affirme que :

$$\lim_{x \to 1^-} G'_X(t) = +\infty$$

  On sait alors que G_X n'est pas dérivable en 1.

Théorème

Soit X une variable aléatoire de fonction génératrice G_X.
Alors X possède une espérance ssi G_X est dérivable en 1, et on a dans ce cas :

$$\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$$

De la même façon,

$$\forall t \in]-1,1[, \quad G''_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)t^{n-2}$$

La série $\sum n(n-1)P(X=n)$ converge ssi $\lim\limits_{t\to 1^-} G''_X(t)$ existe.

$$\begin{aligned}\text{Donc } X \text{ possède une variance} &\Leftrightarrow \sum n^2 P(X=n) \text{ converge}\\ &\Leftrightarrow \text{la série } \sum n(n-1)P(X=n) \text{ converge}\\ &\Leftrightarrow G_X \text{ est deux fois dérivable en } 1\end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(X=n) - \mathrm{E}(X)^2\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) + \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) - \mathrm{E}(X)^2\\ &= G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2\end{aligned}$$

Théorème

Soit X une variable aléatoire entière de fonction génératrice G_X.
Alors X possède une variance ssi G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas,

$$\mathrm{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

V. Un petit exercice

Une urne contient une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
On tire n fois une boule avec remise (tirages indépendants) et on note S_n le nombre de points obtenus.
Loi de S_n ?
Si l'on note X_k la variable aléatoire donnant le résultat du k-ième tirage, les X_k sont des variables aléatoires indépendantes, et elles ont même loi (tirage avec remise).

$$P(X_k = 0) = \frac{1}{4} \qquad P(X_k = 1) = \frac{1}{2} \qquad P(X_k = 2) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \; G_{X_k}(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2$$

Alors, $\forall t$,

$$\begin{aligned}G_{S_n}(t) &= G_{X_1+\ldots+X_n}(t)\\ &= G_{X_1}(t) \times \ldots \times G_{X_n}(t)\\ &= \left(\frac{t+1}{2}\right)^{2n}\end{aligned}$$

$\Rightarrow S_n$ prend ses valeurs dans $[\![0, 2n]\!]$, et $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$,

$$P(S_n = k) = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{k}$$