Chapitre 17

Intégrales impropres

On parle aussi d'intégrales généralisées.
Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et si $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on dit que f est continue par morceaux sur I si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

I. Convergence des intégrales généralisées en une borne de l'intervalle d'intégration

1e) Définition

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle I semi-ouvert, de la forme $[a, b[$, avec $a < b \leqslant +\infty$.
On dit que l'intégrale impropre (ou généralisée) $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente si ses "intégrales partielles" $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ ont une limite finie quand $x \longrightarrow b^-$, $x \in [a, b[$.
On note alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Rq[1] : Pour les séries, on dispose de deux symboles :

- La série $\sum u_n$;
- La somme de cette série $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$ en cas de convergence.

Pour les intégrales il faut faire attentioon parce qu'on ne dispose que d'un symbole : notamment, on sera amené à écrire " l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ diverge " ce qui interdit la manipulation du symbole $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$...

Rq[2] : On notera la similitude entre les définitions d'une série convergente et d'une intégrale convergente ; cette similitude a pour conséquence que les deux théories se ressemblent, avec des théorèmes qui sont des copies les uns des autres.

<u>Rq</u>[3] : De même, si $I =]a, b]$ avec $-\infty \leqslant a < b$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si les intégrales partielles $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ ont une limite finie pour $x \to a^+$.

<u>Rq</u>[4] : Pour l'instant, on ne traite que le cas où I est <u>semi</u>-ouvert (pas de problème aux deux bornes d'intégration simultanément).

<u>Rq</u>[5] : Si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, le symbole $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, en tant qu'intégrale classique de f sur $[a, b]$ est parfaitement défini.
Mais f peut être vue comme continue par morceaux sur $[a, b[$.
La question est de savoir si la pseudo-intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente, et si sa valeur est bien l'intégrale classique $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Pour $x \in [a, b[$,

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to b^-]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \quad \text{(classique par continuité des intégrales fonctions de leur borne supérieure)}$$

Bref, tout va bien.

<u>Rq</u>[6] : Une différence essentielle avec la théorie des séries est la suivante :
autant les sommes partielles d'une série se calculent mal (voire pas), autant les intégrales $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ peuvent souvent se calculer (calcul de primitive).

2e) Premiers exemples, intégrales de référence

ⓐ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$

Évidemment, le choix de 1 comme borne supérieure de l'intégrale est parfaitement arbitraire.
Pour $x \in]0, 1]$,

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} -\ln x \text{ si } \alpha = 1 \\ \left[\dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_x^\alpha = \dfrac{1 - x^{x-\alpha}}{1-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Mais $x^{1-\alpha}$, quand $x \to 0^+$, a une limite finie ssi $1 - \alpha \geqslant 0$.
Donc :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha < 1}$$

De même :

$$\int_a^{a+1} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha} \text{ ou } \int_{a-1}^a \frac{\mathrm{d}t}{(a-t)^\alpha} \text{ convergent ssi } \alpha < 1$$

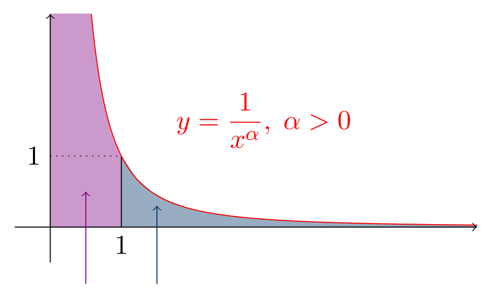
ⓑ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$

Pour $x > 1$,

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln x \text{ si } \alpha = 1 \\ \left[\dfrac{t^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}\right]_x^\alpha = \dfrac{1 - x^{x-\alpha}}{1-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Et $x^{1-\alpha}$ a une limite finie quand $x \to +\infty$ ssi $1 - \alpha \leqslant 0$.

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha > 1}$$



ⓒ $\displaystyle\int_0^1 \ln t \mathrm{d}t$

Pour $x \in]0, 1]$,

$$\begin{aligned} \int_x^1 \ln t \mathrm{d}t &= [t \ln t - t]_x^1 \\ &= -1 + x \ln x + x \\ &\xrightarrow[x \to 0^+]{} -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 \ln t \ \mathrm{d}t \text{ est convergente (et vaut } -1).}$$

De la même façon, les intégrales :

$$\int_a^{a+1} \ln(t-a)\mathrm{d}t \text{ ou } \int_{a-1}^a \ln(a-t)\mathrm{d}t$$

convergent.

3e) Opérations

Propriété 1

Soit $I = [a, b[$, f et g deux fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$, λ et $\mu \in \mathbb{K}$.
Si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ convergent, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

On écrit $\displaystyle\int_a^x (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^x f + \mu \int_a^x g$ et on passe à la limite.

Rq[1] : On n'a donc pas de problème pour regrouper en une seule deux intégrales convergentes.
Mais casser en deux une intégrale convergente pose plus de problème :
Si $\displaystyle\int_a^b (f+g)$ existe et si l'on veut écrire $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$, on doit au préalable prouver la convergence de l'une des deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b g$ (l'autre converge par différence).

Rq[2] : Soit $I = [a, b[$ et f continue par morceaux sur I, tq $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.
Si $x \in [a, b[$,

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\mathrm{d}t$$

Donc $\displaystyle\int_a^x f$ a une limite quand $x \to b$ ssi $\displaystyle\int_c^x f$ en a une.
Donc $\displaystyle\int_a^b$ converge ssi $\displaystyle\int_c^b f$ converge, et dans ce cas, en passant à la limite, il vient :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Formule de Chasles

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux, et $c \in [a, b[$.
Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ sont de même nature et, en cas de convergence,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

En particulier, si $x \in [a, b[$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[x\to b^-]{} \int_a^b f} + \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$$

Et donc, par définition même, il vient :

Propriété

Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge (f continue par morceaux sur $[a, b[$),

$$\lim_{x \to b^-} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t = 0$$

De la même façon, supposons f continue sur $I = [a, b[$ et écrivons :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$$

Comme $\displaystyle\int_a^b$ est une constante et que $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ se dérive en $f(x)$, $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ se dérive en $-f(x)$ (exactement comme si la borne b était une borne propre).

<u>ex</u> : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ se dérive en $-\mathrm{e}^{-x^2}$.

4e) Le cas particulier des fonctions positives

Supposons $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et <u>positive</u>.
Pour $a \leqslant x < y < b$,

$$\int_a^y f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_x^y f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Donc $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une fonction <u>croissante</u> de x, et donc ses intégrales partielles tendent soit vers une limite finie, soit vers $+\infty$ (l'option "pas de limite" disparaît). Cela explique que l'on va avoir, pour les intégrales de fonctions positives, des résultats analogues à ceux concernant les séries de réels positifs.

5e) Un piège

Par analogie avec les séries, il est légitime de penser que si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, la fonction f doit tendre vers 0 en $+\infty$.

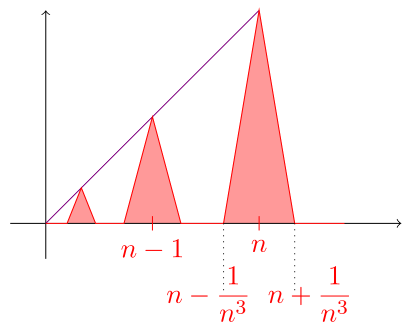
Ce résultat est <u>faux</u>.

<u>Contre-exemple 1</u> :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{N}} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \mathbb{N} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

$\mathbf{1}_{\mathbb{N}} \underset{+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$ converge et vaut 0.
(Contre-exemple peu satisfaisant, $\mathbf{1}_{\mathbb{N}}$ n'est pas continue.)

<u>Contre-exemple 2</u> :



L'aire délimitée par chaque pic vaut $\dfrac{1}{n^2}$, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, pourtant f ne tend pas vers 0, et elle n'est même pas bornée.

Ainsi, la phrase « f ne tend pas vers 0 en $+\infty$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge » est FAUSSE !

II. Règles de comparaison pour les intégrales de fonctions positives

1e) Les deux théorèmes

Comme on l'a vu, si $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux et positive, les intégrales partielles $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ croissent avec x.

Donc elles auront une limite finie ssi elles sont majorées.

Règle №1

Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et vérifiant

$$0 \leqslant f(t) \leqslant g(t) \quad \forall t \in [a, b[.$$

Alors si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

En effet, $\forall x \in [a, b[$,

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \text{un majorant}$$

Les intégrales partielles de f sont donc majorées.

□

Bien évidemment, cette règle reste vraie si on n'a $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ qu'au voisinage de b (on raisonne sur $[c, b[$ au lieu de raisonner sur $[a, b[$).

Règle №2

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux.
On suppose :

- $f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t)$
- $g(t) \geqslant 0$

Alors les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.

Démonstration

On écrit qu'au voisinage de b, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{2}g(t) \leqslant f(t) \leqslant \frac{3}{2}g(t)$$

et on utilise la règle №1.

2e) Exemples

ⓐ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t+1}\mathrm{d}t$

La fonction est continue sur $[0, +\infty[$.

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{t} \geqslant 0$$

Or $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t+1}\mathrm{d}t$ diverge.

ⓑ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

La fonction est continue sur $[0, +\infty[$.
Version 1 :

Pour t assez grand,

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge.

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Version 2 :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

ⓒ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$

Pour $t \geqslant 1$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Rq : $\forall t \geqslant \dfrac{1}{2}$,

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant 2t\mathrm{e}^{-t^2}$$

Or $\displaystyle\int_0^x 2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

d $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\mathrm{d}t$

Ici, la fonction est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (elle y est négative).
Équivalent de $\cos t$ en $\dfrac{\pi}{2}$: $t = \dfrac{\pi}{2} - h$.

$$\begin{aligned}\cos t &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)\\ &= \sin h\\ &\sim h\\ &\underset{\pi/2}{\sim} \frac{\pi}{2} - t\end{aligned}$$

Ces infiniments petits équivalents ont des $\ln$ équivalentes.

$$\Rightarrow \ln(\cos t) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \ln\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \leqslant 0$$

Or $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\mathrm{d}t$ converge.

e $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

$$\int_\pi^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\pi^x + \int_\pi^x \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

$\dfrac{1-\cos x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
Par ailleurs,

$$0 \leqslant \frac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \frac{2}{t^2}$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge.

$$\Rightarrow \int_\pi^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

$$\Rightarrow \int_\pi^{x} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t \text{ a une limite finie pour } x \longrightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \int_\pi^{x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \text{ a une limite finie pour } x \longrightarrow +\infty$$

$$\rightarrow \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

3e) Absolue convergence

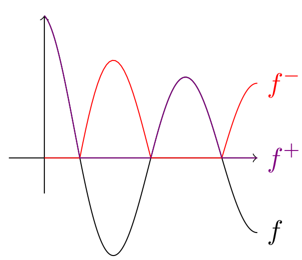
Définition

Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une fonction continue par morceaux.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge.
(On dit aussi que f est "intégrable" ou "sommable" sur $[a,b[$.)

La terminologie "f est intégrable $[a,b[$" est dangereuse car elle ne signifie pas que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ existe...

Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux dont l'intégrale converge absolument.
Pour $x \in [a,b[$, on pose :

$$f^+(x) = \sup\big(f(x),0\big) \qquad\qquad f^-(x) = -\inf\big(f(x),0\big)$$



On a trivialement que f^+ et f^- sont des fonctions positives tq :

$$|f| = f^+ + f^- \text{ et } f = f^+ - f^-$$

Or, $\sup(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$, donc le sup de deux fonctions continues par morceaux est continu par morceaux.
Bilan :

$$0 \leqslant f^+ \leqslant |f| \text{ et } 0 \leqslant f^- \leqslant |f|$$

Mais $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.

$$\Rightarrow \int_a^b f^+ \text{ et } \int_a^b f^- \text{ convergent.}$$

Mais $f = f^+ - f^-$.

$$\Rightarrow \int_a^b f \text{ converge.}$$

Pour les fonctions à valeurs réelles, l'absolue convergence entraîne la convergence.
Si f arrive dans $\mathbb{C}$ et si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge.

$$f(t) = \underbrace{\alpha(t)}_{\in\mathbb{R}} + \mathrm{i}\underbrace{\beta(t)}_{\in\mathbb{R}}$$

$$|\alpha(t)| \leqslant |f(t)| \text{ et } |\beta(t)| \leqslant |f(t)|$$

Et $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.

$$\Rightarrow \int_a^b |\alpha| \text{ et } \int_a^b |\beta| \text{ convergent.}$$

$$\Rightarrow \int_a^b \alpha \text{ et } \int_a^b \beta \text{ convergent (cas réel).}$$

Mais $f = \alpha + \mathrm{i}\beta$.

$$\Rightarrow \int_a^b f \text{ converge.}$$

Théorème

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Rq : Si f arrive dans E, evn de dimension finie, alors la convergence de $\displaystyle\int_a^b \|f(t)\|\mathrm{d}t$ entraîne, pour les mêmes raisons, celle de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

III. Quelques résultats supplémentaires

1e) Les intégrales "faussement impropres"

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux sur $[a, b[$ avec b fini.
Supposons que f a une limite finie en b :

$$\bar{f} : \begin{cases} [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq b \\ \lim\limits_{x \to b^-} f(x) \text{ si } x = b \end{cases} \end{cases}$$

On a vu alors que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ en tant qu'intégrale impropre, converge vers $\displaystyle\int_a^b \bar{f}(t)\mathrm{d}t$.
En réalité, il n'y a pas de réel problème en b puisque f peut être vue comme continue en b : dans ce cas, on dira qu'il y a un faux problème en b, ou que l'intégrale est faussement impropre.

ex : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$: cette intégrale est faussement impropre car $\dfrac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$.

Cela suppose évidemment b fini. Une intégrale est toujours réellement impropre en $+\infty$!

Rq : Consédirons $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

La fonction $t \longmapsto \sin\dfrac{1}{t}$ est continue sur $]0,1]$.

$\sin\dfrac{1}{t}$ n'a pas de limite finie en 0, mais $\left|\sin\dfrac{1}{t}\right| \leqslant 1$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t$ converge.

Bref, $\displaystyle\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

Tout cela repose sur le fait qu'on intègre une fonction bornée au voisinage d'un point fini.

2e) Retour sur le comportement à l'infini

On a vu que :

$$\int_0^{+\infty} f \text{ converge } \not\Rightarrow \lim_{+\infty} f = 0$$

Mais il est des cas où cette affirmation est vraie.
Supposons notamment que f possède une limite ℓ en $+\infty$ (finie ou non a priori).
On supposera pour mieux voir les choses que f arrive dans $\mathbb{R}$ (si elle arrive dans $\mathbb{C}$, on raison sur $\mathfrak{R}f$ ou sur $\mathfrak{I}f$).
Si $\ell \neq 0$, par exemple $0 < \ell \leqslant +\infty$.

On pose $\alpha = \begin{cases} \dfrac{\ell}{2} \text{ si } \ell \in \mathbb{R} \\ 1 \text{ si } \ell = +\infty \end{cases}$.

$$\exists A / \ \forall t \geqslant A, \quad f(t) \geqslant \alpha$$

Alors, si $x \geqslant A$,

$$\int_A^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \alpha(x-A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Et donc $\displaystyle\int_A^{+\infty} f$ diverge.

Propriété

> Soit $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
> Si f a une limite en $+\infty$ et si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, alors $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$.

En d'autres termes, la phrase "Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, alors f a une limite nulle en $+\infty$" est fausse.

Mais la phrase "Si f a une limite autre que 0 en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ diverge" est juste.

ex : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan t \,\mathrm{d}t$

« $\arctan t \not\xrightarrow[+\infty]{} 0$ donc l'intégrale diverge. »
FAUX

« arctan possède une limite autre que 0 en $+\infty$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan t\,\mathrm{d}t$ diverge. »
JUSTE

3e) Généralisation d'un classique

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue positive tq $\int_a^b f$ converge et $\int_a^b f = 0$.
Alors $\forall x \in [a, b[$,

$$0 \leqslant \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Alors $f = 0$ sur $[a, x]$, et ce $\forall x \in [a, b[$.

Théorème

Si $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, positive, et si $\int_a^b f = 0$, alors f est nulle.

4e) L'intégration par parties

On dispose d'une intégrale convergente $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ($f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$), et on aimerait l'intégrer par parties.
Peut-on le faire sans précautions ?

$$« \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t »$$

Cela n'a aucun sens !
$\frac{\cos t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et $\int_0^1 \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$ diverge ($\frac{\cos t}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^2} \geqslant 0$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ diverge).
En revanche :

$$« \int_0^1 \frac{\sin t}{t} = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t » \qquad (\ast)$$

Ici, $\frac{1-\cos t}{t} \xrightarrow[t\to0]{} 0$, le crochet a un sens.
Par ailleurs, $\frac{1-\cos t}{t^2} \xrightarrow[t\to0]{} \frac{1}{2}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$ est faussement impropre.
Cette intégration par parties est peut-être vraie.
Faisons les choses proprement :
soit $x \in]0, 1]$,

$$\int_x^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

Puis :

$$\int_x^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to0]{} \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

$$\frac{1-\cos t}{t} \xrightarrow[x\to0]{} 0$$

$$\int_x^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to0]{} \underbrace{\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t}_{\text{intégrale convergente}}$$

Finalement, $(\ast)$ est validée.
Au bout du compte, il n'y aura pas de théorème général d'intégration par parties, et donc toute intégration par

parties à la sauvage sera non valable.
En fait, si l'on écrit :

$$\int_a^x f'(t)g(t)\mathrm{d}t = \left[f(t)g(t)\right]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

pour $x \in [a, b[$, en supposant bien sûr que $\displaystyle\int_0^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ converge.

Quand $x \longrightarrow b$, $\displaystyle\int_a^x f'g \longrightarrow \int_a^b f'g$.

Alors si fg a une limite finie quand $x \longrightarrow b$, on si $\displaystyle\int_a^b fg'$ converge, on peut faire $x \longrightarrow b$ et on récupère la formule d'intégration par parties.

Règle

Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ tq $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ converge.

Alors on peut calculer cette intégrale par parties dès lors que $\left[f(t)g(t)\right]_a^b$ ou que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$ a un sens.

Exemple :

Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$

La fonction intégrée est continue sur $[0, +\infty[$, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^4} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4}$ converge.

Pour calculer I, on sait qu'une méthode consiste à intégrer par parties $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ (cette intégrale converge trivialement).

On rédigera les choses ainsi :

« $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2tt}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$, cette formule étant validée par le fait que (par exemple), le crochet a un sens ($\dfrac{t}{1+t^2} \underset{\infty}{\longrightarrow} 0$). »

Alors :

$$\left[\arctan t\right]_0^{+\infty} = 0 - 0 + \int_0^{+\infty} \frac{2t^2 + 2 - 2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

i.e $\dfrac{\pi}{2} = 2 \times \dfrac{\pi}{2} - 2I$

$$\Rightarrow\ I = \frac{\pi}{4}$$

5$^{\text{e}}$) Intégrales impropres aux deux bornes

On suppose que $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux.

Alors, par définition, la convergence de l'intégrale (doublement impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est la conjonction de la convergence de deux intégrales : celle de $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et celle de $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ pour $c \in]a, b[$.

(Cette définition est bien indépendante du choix du point c.)

Enfin, en cas de convergence, on pose :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

En pratique :

Les équivalents et les majorations aux points a et b n'ayant rien à voir, on séparera clairement les études de convergence en a et en b.

ex 1 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$

La fonction intégrée est continue sur $]0,+\infty[$.

En 0 :

$$\frac{\ln t}{1+t^2} \underset{0^+}{\sim} \ln t \leqslant 0$$

et $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge (cours).

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

En $+\infty$:

$$\frac{\ln t}{1+t^2} \sim \frac{\ln t}{t^2} \geqslant 0$$

$$t^{\frac{3}{2}}\frac{\ln t}{1+t^2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0 \;\Rightarrow\; 0 \leqslant \frac{\ln t}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \text{ pour } t \text{ assez grand}$$

or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$ converge.

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge.

ex 2 : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$

En $+\infty$:

$$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t} \geqslant 0 \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ diverge.}$$

Cela rend inutile l'étude de la convergence en $-\infty$.

Mais $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0 \;\forall x$

$$\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cela ne donne absolument par le droit d'en conclure que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

Les études aux deux bornes doivent être indépendantes.

6e) Comment rédiger une étude d'intégrale impropre ?

Soit à étudier une intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

On commencera toujours par préciser sur quel intervalle la fonction est continue par morceaux.

ex : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan\frac{1}{t}}{1+t}\mathrm{d}t$

La fonction est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

ex : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t+t^3}}\mathrm{d}t$

La fonction est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.

Cela a pour but d'éviter l'étude de problèmes qui n'existent pas (comme par exemple l'étude de la convergence en 1 de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t+t^3}}\mathrm{d}t$).

IV. Le problème du changement de variable

On se donne une intégrale impropre, supposée convergente, et on veut la calculer par changement de variable. Peut-on le faire ?

ex 1 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t}\mathrm{d}t$

La fonction intégrée est continue sur $]0,+\infty[$.

En 0 : $\displaystyle\frac{\sin 2t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 2$, il y a un faux problème.

En $+\infty$: analogue à celle de $\displaystyle\frac{\sin t}{t}$.

On aimerait poser $u = 2t$.

$$\begin{cases} t=0 \longrightarrow u=0 \\ t=+\infty \longrightarrow u=+\infty \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}u \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t}\mathrm{d}t \overset{?}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\frac{u}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}u$$

$$\overset{?}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$

Pour justifier cela, on prend deux bornes propres α et A, $0<\alpha<A<+\infty$.

$$\int_\alpha^{A} \frac{\sin 2t}{t}\mathrm{d}t = \int_{2\alpha}^{2A} \frac{\sin u}{\frac{u}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}u = \int_{2\alpha}^{2A} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$

$\left.\begin{array}{r}\alpha \longrightarrow 0\\ A\longrightarrow +\infty\end{array}\right\}$ on récupère la formule voulue.

ex 2 : Calcul de $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

En 0 : $f(t) \underset{0^+}{\sim} \ln t \leqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t$ converge.

En $+\infty$: $\displaystyle t^{\frac{3}{2}}\frac{\ln t}{1+t^2} \longrightarrow 0$ donc pour t assez grand,

$$0 \leqslant \frac{\ln t}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$ converge.

On aimerait calculer I en posant $u = \dfrac{1}{t}$.

Soient $0 < \alpha < A < +\infty$:

$$\int_\alpha^A \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{A}} \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u^2}} \frac{-\mathrm{d}u}{u^2}$$
$$= -\int_{\frac{1}{A}}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\ln u}{u^2+1}\mathrm{d}u$$

$\alpha \longrightarrow 0$, $A \longrightarrow +\infty$:

$$I = -I$$
$$\Rightarrow \ I = 0$$

Principe

En théorie, tout changement de variable doit se faire sous forme propre, puis être suivi d'un passage à la limite comme dans les exemples.

Tolérance

Les changements de variables "standards" tels que :

- $u = at + b$
- $u = t^\alpha$
- $u = \mathrm{e}^t$
- $u = \ln t$

pourront être effectués directement sans justification.

V. Un exemple : premières propriétés de la fonction Γ d'Euler

On pose, quand c'est possible :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t$$

- $\mathcal{D}_\Gamma$?
- lien entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$ quand $x \in \mathcal{D}_\Gamma$.
- $\Gamma(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
- $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$?

À x fixé, la fonction intégrée est continue sur $]0, +\infty[$.

- $\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}}$ converge ssi $1 - x < 1$.
- <u>En $+\infty$</u> : $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ pour t assez grand, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge.

$$\text{Donc } \ \mathcal{D}_\Gamma = \mathbb{R}^{+*}$$

Pour $x > 0$,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^x\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

Cette intégration par partie est justifiée par le fait que le crochet a un sens.
D'où :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n)\\ &= n(n-1)\Gamma(n-1)\\ &\vdots\\ &= n!\Gamma(1)\\ &= n!\end{aligned}$$

Enfin,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

On pose $u = \sqrt{t}$ (changement de variable standard en puissance de t).

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} 2\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

VI. Intégration des relations de comparaison

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.

- Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge,
  alors $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b^-]{} 0$
- Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge,
  si $f \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^x \xrightarrow[x\to b^-]{} +\infty$

Dans un cas comme dans l'autre, il peut être utile de connaître l'ordre de grandeur de ces quantités.

1e) Intégration des "o"

Théorème

Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues par morceaux.
On suppose :

1e) $f(t) \underset{b^-}{=} o\big(g(t)\big)$

2e) g est positive au voisinage de b.

Alors :

1er cas : Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente et

$$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{=} o\left(\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right)$$

2^e^ cas : Si $\int_a^b g$ diverge, alors

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{=} o\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists c \in [a,b[/\ \forall t \in [c,b[, \quad |f(t)| \leqslant \varepsilon g(t)$$

1^er^ cas : si $x \geqslant c$,

$\forall t \in [x,b[$,

$$|f(t)[\leqslant \varepsilon g(t)$$

On intègre :

$$\int_x^b |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$$

A fortiori :

$$\left|\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$$

2^e^ cas : si $x \geqslant c$,

$$\int_c^x |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_c^x g(t)\mathrm{d}t$$

En supposant $g \geqslant 0$ sur $[a,b[$,

$$\int_c^x |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

Mais $\int_a^c |f(t)|\mathrm{d}t$ est une constante (de x) et $\int_a^x \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$.
$\Rightarrow \exists d \in [a,b[/\ \forall x \geqslant d$,

$$\int_a^c |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

Alors si $x \geqslant \begin{matrix} c \\ d \end{matrix}$,

$$\int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant 2\varepsilon \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

A fortiori :

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

ex : Comportement en $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.
En $+\infty$,

$$\mathrm{e}^{-t^2} = o\left(2t\mathrm{e}^{-t^2}\right)$$

Or $2t\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 0$ et $\int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.

$$\Rightarrow \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = o\left(\int_x^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)$$

Mais $\displaystyle\int_x^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t^2}\right]_x^{+\infty} = \mathrm{e}^{-x^2}$.

$$\Rightarrow \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)$$

Mais on aurait préféré un équivalent !
Pour cela, faisons comme si l'on essayait de calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t &= \int_x^{+\infty} \frac{2t\mathrm{e}^{-t^2}}{2t}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{-\mathrm{e}^{-t^2}}{2t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mais :

$$\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge, et $\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant 0$, donc :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{d}t = o\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$\Rightarrow \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \sim \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$$

2e) Intégration des équivalents

En écrivant

$$f \underset{b^-}{\sim} g \quad \Leftrightarrow \quad f - g \underset{b^-}{=} o(g)$$

et en utilisant le théorème précédent, il vient :

Théorème

Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux.
On suppose que

1e) $f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t)$

2e) $g \geqslant 0$

Alors :

1er cas : Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, $\displaystyle\int_a^b f$ converge (absolument) et

$$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \underset{b^-}{\sim} \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$$

2es cas : Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors

$$\int_a^x f \underset{b^-}{\sim} \int_a^x g$$

<u>ex</u> : $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$

$\sin x \underset{0}{\sim} x$

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t = \int_x^{1} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t}_{\text{constante}}$$

Au voisinage de 0,

$$\frac{\cos t}{t} \sim \frac{1}{t} \geqslant 0 \text{ et } \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ diverge.}$$

$$\Rightarrow \int_x^1 \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x$$

« Du coup, au final, »

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \sim -\ln x$$

$$\Rightarrow \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \sim -x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

3e) Sommation des $\mathcal{O}$

Théorème

Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux.
On suppose :

1e) $f(t) \underset{b^-}{=} \mathcal{O}\big(g(t)\big)$

2e) $g \geqslant 0$

Alors :

<u>1er cas</u> : Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, $\displaystyle\int_a^b f$ convergent absolument et

$$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{=} \mathcal{O}\left(\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right)$$

<u>2e cas</u> : Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{=} \mathcal{O}\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)$$

VII. Introduction au chapitre suivant

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge en un certain sens vers f.
Si la convergence est simple, on écrit :
Soit $\varepsilon > 0$,

$$\forall t \in [a,b],\ \exists N_t \in \mathbb{N} /\ \forall n \geqslant N_t, \quad |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$$

L'inégalité ne peut être intégrée puisque le rang à partir duquel elle est vraie dépend de t.
Un autre problème apparaît : f est-elle suffisamment régulière pour être intégrée ?
Si la convergence est uniforme, tout va bien (f est continue si les f_n le sont, et on peut passer à la limite dans l'intégrale).
Dernier point :

Si $(f_n) \xrightarrow{\text{unif}^t} f$ et si les f_n sont continues, on écrit :
Soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbb{N} /\ \forall t \in [a,b],\ \forall n \geqslant N, \quad |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$$

Alors, $\forall n \geqslant N$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| &\leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

Que se passe-t-il si les intégrales sont impropres ?

La démonstration précédente s'écroule totalement pour deux raisons :

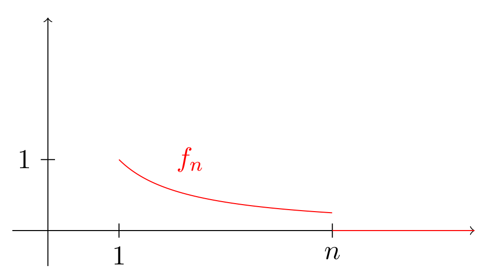
1$^{\text{e}}$) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est-elle convergente si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f_n$ le sont ?

2$^{\text{e}}$) Que faire de la majoration par $\varepsilon(b-a)$ si $b - a = +\infty$?

Enfin :

Tout cela suppose une convergence uniforme, qui semble indispensable, mais qui est une hypothèse très lourde !

ex 1 : Posons $f_n : \begin{cases} [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{matrix} \dfrac{1}{t} \text{ si } t \leqslant n \\ 0 \text{ si } t > n \end{matrix} \end{cases}$



À t fixé, $t \geqslant 1$, pour n assez grand,

$$f_n(t) = \frac{1}{t} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{t}$$

- La suite (f_n) converge simplement vers $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$.
- $\left| f_n(t) - \dfrac{1}{t} \right| \leqslant \dfrac{1}{n} \quad \forall t \geqslant 1$

La convergence est donc uniforme sur $[1, +\infty[$.

Bref, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f_n$ converge $\forall n$, $f_n \xrightarrow{\text{unif}^t} f$ mais $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

<u>ex 2</u> : On pose $g_n(t) = \dfrac{n}{n^2+t^2}$

$$|g_n(t) - 0| \leqslant \frac{1}{n} \text{ donc } g_n \xrightarrow{\text{unif}^t} 0 \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

$\forall n$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n$ converge, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} 0$ converge.

Mais :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g_n &= \int_0^{+\infty} \frac{n}{n^2+t^2}\mathrm{d}t \\ &= \left[\arctan\frac{t}{n}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Le chapitre suivant a pour but de régler ces problèmes.