Chapitre 18

Intégrales dépendant d'un paramètre

Toutes les fonctions envisagées seront définies sur intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ (voire dans un evn de dimension finie), et continues par morceaux.

I. Le théorème de convergence dominée

1e) Son énoncé

Théorème (de convergence dominée, ou de Lebesgue)

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose

1e) $\forall n$, f_n est continue par morceaux.

2e) La suite (f_n) converge simplement sur I vers une certaine fonction f.

3e) f est continue par morceaux.

→ 4e) Il existe une fonction φ, continue par morceaux, telle que $\displaystyle\int_I \varphi$ soit convergente, et telle que

$$\forall t \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

(Hypothèse de domination.)

Alors les f_n et f sont intégrables sur I, et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

Rq1 : C'est un théorème très puissant et totalement non trivial, essentiellement parce qu'il demande une convergence simple.

Rq2 : L'hypothèse de domination est l'hypothèse lourde, elle assure entre autres choses (mais ce n'est pas sa force principale) l'absolue convergence des $\displaystyle\int_I f_n$.

De plus, grâce à la convergence simple, on a aussi $|f(t)| \leqslant \varphi(t)$, ce qui assure que $\displaystyle\int_I f$ converge.

Rq3 : L'hypothèse de domination s'apparente fortement à une convergence normale (pour les séries).

Rq4 : Dans tous les théorèmes qui suivent, il y aura deux catégories d'hypothèses :
Les légères : elles plantent le décor. (ici 1e), 2e), 3e))
Les lourdes : celles qui font fonctionner le théorème.

2^e) Exemples

<u>ex 1</u> : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin n^2 t}{1+nt^2}}_{f_n(t)} \mathrm{d}t$$

Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$.
En $+\infty$, $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{nt^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge.

- I_n existe donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- À t fixé,

$$\frac{\sin n^2 t}{1+nt^2} \begin{array}{l} \xrightarrow{n\infty} 0 \text{ si } t = 0 \\ \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ si } t \neq 0 \end{array}$$

Les f_n sont continues et convergent simplement vers la fonction nulle qui est continue.

$$\forall t, \forall n \geqslant 1, \quad |f_n(t)| \leqslant \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{\text{ind}^{\text{t}} \text{ de } n}$$

Et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge.

$\Rightarrow$ Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^{+\infty} 0 = 0$$

<u>ex 2</u> : Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \underbrace{f(t^n)}_{g_n(t)} \mathrm{d}t$$

- g_n est continue sur $[0,1]$ $\forall n$.
- À t fixé,

$$g_n(t) = f(t^n) \begin{array}{l} \xrightarrow{n\infty} f(0) \text{ si } 0 \leqslant t < 1 \\ \underset{n\infty}{\longrightarrow} f(1) \text{ si } t = 1 \end{array}$$

La suite (g_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux :

$$h : \begin{cases} t \longmapsto f(0) \text{ si } t \neq 1 \\ 1 \longmapsto f(1) \end{cases}$$

Soit M un majorant de la fonction continue $|f|$ sur $[0,1]$, on a :

$$|g_n(t)| \leqslant M \quad \forall t \forall n$$

Et $\displaystyle\int_0^1 M$ converge.

Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim u_n = \int_0^1 h = f(0)$$

ex 3 : $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 nt}{\frac{1}{n} + nt^2} \mathrm{d}t$

Cela ressemble à l'exemple 1, mais $f_n \xrightarrow{\text{simpl}^t} 0$ sur $\mathbb{R}^+$ et, $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin^2 nt}{\frac{1}{n} + nt^2}\right| &\leqslant \frac{1}{\frac{1}{n} + t^2}\\ &\leqslant \frac{1}{t^2}\end{aligned}$$

Problème : la disparition du 1 au dénominateur rend la fonction majorante non sommable sur $\mathbb{R}^+$; dans l'état actuel des choses, on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée.
Or, ici,

$$\begin{aligned}J_n &= n\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 nt}{1 + n^2t^2} \mathrm{d}t \qquad u = nt\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{1 + u^2} \mathrm{d}u\\ &= \text{c}^{\text{ste}} \text{ non nulle}\end{aligned}$$

$$J_n \not\to 0 = \int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}t$$

Cet exemple prouve donc que l'hypothèse de domination est essentielle.

ex 4 : On pose pour $x > 0$:

$$u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathrm{d}t$$

(En 0, $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}}$ converge car $x > 0$.)
Le problème ici est que la borne supérieure de l'intégrale bouge aussi avec n.
La ruse est la suivante :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathbf{1}_{]0,n]}(t) \mathrm{d}t \text{ où } \mathbf{1}_{]0,n]}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < t \leqslant n \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

- f_n est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.
- $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t}$ à t fixé, $\mathbf{1}_{]0,n]}(t) = 1$ pour n assez grand.
  Finalement, à t fixé,
  $$f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \text{ qui est continue sur } \mathbb{R}^{+*}$$
- Domination :
  $$\forall x \geqslant 0, \quad 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$$
  $$\Rightarrow\ \forall t \in]0, n], \quad 0 \leqslant 1 - \frac{t}{n} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}$$

$$\Rightarrow \ 0 \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$
$$\Rightarrow \ |f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ converge (cf. $\Gamma(x)$).
Le théorème de Lebesgue s'applique :

$$\lim_n u_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = \Gamma(x)$$

<u>Complément</u> : calculons u_n par parties.

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^n \underbrace{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}_{\searrow} \underbrace{t^{x-1}}_{\nearrow}\mathrm{d}t \\
&= \left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \frac{t^x}{x}\right]_0^n + \int_0^n \frac{n}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\frac{t^x}{x}\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{n}\frac{1}{x}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} t^x\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{n}\frac{1}{x}\left(\left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^n + \frac{n-1}{n}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\frac{t^{x+1}}{x+1}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{n(n-1)}{nn}\frac{1}{x}\frac{1}{x+1}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}t^{x+1}\mathrm{d}t \\
&\ \vdots \\
&= \frac{n(n-1)\dots 1}{nn\dots n}\frac{1}{x(x+1)\dots(n+x-1)}\int_0^n t^{n+x-1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{n!}{n^n x(x+1)\dots(n+x-1)}\frac{n^{n+x}}{n+x} \\
&= \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}
\end{aligned}$$

Finalement, $\forall x > 0$,

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}}$$

3e) Le problème du choix

On dispose désormais de deux théorèmes pour passer à la limite dans une intégrale :

1e) Le théorème élémentaire :
$f_n \xrightarrow{\text{unif}^t} f$ sur $\underline{[a,b]}$, tout le monde continu par morceaux :
Alors $\displaystyle\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$.

2e) Le théorème de Lebesgue.

Lequel choisir ?

- Pour les intégrales impropres, la question ne se pose pas.
- Pour les intégrales propres, la convergence simple de Lebesgue est un avantage, mais l'hypothèse de domination n'existe pas dans le 1er théorème.

Mais supposons qu'on soit sous les hypothèses du théorème élémentaire.
Les f_n sont continues par morceaux sur un segment, elles y sont donc bornées.
Mais (f_n) converge uniformément, et on sait dans ce cas que les f_n sont uniformément bornées :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a,b], \quad |f_n(t)| \leqslant M$$

On récupère ainsi l'hypothèse de domination ($\int_a^b M$ converge) et on peut donc appliquer le théorème de Lebesgue.
Conclusion :

Quand le théorème élémentaire s'applique, le théorème de Lebesgue s'applique.

II. Fonctions définies par une intégrale

0e) Position du problème

On envisage ici des fonctions se présentant sous la forme suivante :

$$F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$$

($\Gamma(x)$ en est un exemple)
On s'intéresse ici à la continuité de telles fonctions, et à la possibilité de les dériver sous le signe $\int$.
Les moyens mis en œuvre :

Fixons a, et envisageons le problème de la continuité de F en a :

$$\lim_{x \to a} F(x) \overset{?}{=} F(a)$$

Ou encore :

$$\lim_{x \to a} \int_I f(t,x)\mathrm{d}t \overset{?}{=} \int_I f(t,a)$$

On est donc devant un problème de passage à la limite dans une intégrale, ce que Lebesgue nous a appris à faire mais... avec une variable entière tendant vers $+\infty$, pas avec une variable x tendant continûment vers a.

Rappel : procédé de discrétisation

Soit $f : A \longrightarrow F$ ($A \subset E$ evn) et $a \in \bar{A}$.
Alors f possède une limite ℓ en a ssi, pour toute suite (x_n) de points de A convergeant vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers ℓ.

1^e) Continuité des intégrales à paramètre

On se donne une fonction $f : I \times A \longrightarrow \mathbb{C}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, A une partie d'un evn E, et l'on veut poser, pour $x \in A$,

$$F(x) = \int_I f(t,x)\mathrm{d}t$$

Pour ce faire, on demande :

i) $\forall x \in A$, l'application $t \longmapsto f(t,x)$ est continue par morceaux.

ii) $\forall x \in A$, l'intégrale $\int_I f(t,x)\mathrm{d}t$ converge.

i) et ii) nous permettent de poser $F(x) = \int_I f(t,x)\mathrm{d}t \; \forall x \in A$.

Soit $a \in A$, et soit (x_n) une suite de points de A convergeant vers a :

$$F(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{?} F(a)$$

$$\text{i.e } \int_I \underbrace{f(t,x_n)}_{g_n(t)}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{?} \int_I f(t,a)\mathrm{d}t$$

On va essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée à g_n.

1^e) g_n est continue par morceaux :
Oui (i)).

2^e) On voudrait qu'à t fixé,

$$g_n(t) = f(t,x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t,a)$$

Pour cela, on demande à f d'être continue par rapport à sa seconde variable.

3^e) La limite simple (ici la fonction $t \longmapsto f(t,a)$) est continue par morceaux :
Oui d'après i).

4^e) La domination :
On veut une fonction intégrable φ, indépendante de n, telle que

$$\forall t \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad |g_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$
$$\text{i.e } \forall t \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad |f(t,x_n)| \leqslant \varphi(t)$$

Il suffit pour cela de demander l'existence d'une fonction intégrable φ sur I, indépendante de x, telle que :

$$\forall t \in I\ \forall x \in A,\quad |f(t,x)| \leqslant \varphi(t)$$

Notation

Si f est une fonction de la variable (t,x), alors :

- Pour x fixé, $f(\cdot,x)$ est la fonction de l'unique variable t.
- Pour t fixé, $f(t,\cdot)$ est la fonction de l'unique variable x.

Théorème de continuité

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \subset E$ evn, et $f : I \times A \longrightarrow \mathbb{C}$.
On suppose :

1^e) $f(\cdot,x)$ est continue par morceaux sur I pour tout x de A.

2^e) $f(t,\cdot)$ est continue sur A pour tout $t \in I$.

3e) Il existe une fonction continue par morceaux et intégrable φ sur I telle que

$$\forall (t,x) \in I \times A, \quad |f(t,x)| \leqslant \varphi(t)$$

On peut alors poser, pour $x \in A$,

$$F(x) = \int_I f(t,x)\mathrm{d}t$$

et la fonction ainsi définie est continue sur A.

ex 1 : On pose, quand c'est possible,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

À x fixé, la fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.
En $+\infty$:

Si $x < 0$, la fonction intégrée tend vers $+\infty$, l'intégrale diverge.
Si $x > 0$, $0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge.

Donc :

$\mathrm{D}_F = \mathbb{R}^+$

Alors :

- $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(\cdot, x)$ est continue par morceaux.
- $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f(t, \cdot)$ est continue.
- $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,

$$|f(t,x)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{1+t^2} \text{ intégrable ind}^{\text{t}} \text{ de } x$$

F est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

ex 2 : On pose, quand c'est possible, pour $x \geqslant 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2+x^2}\mathrm{d}t$$

- La fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}^+$ si $x \neq 0$, sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x = 0$.
- $\left|\dfrac{\sin t}{t^2+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, l'intégrale est toujours convergente à la borne $+\infty$.
- Pour $x = 0$:

$$\frac{\sin t}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t} \geqslant 0 \text{ et } \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} \text{ diverge.}$$

Donc : $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^{+*}$

- $f(t,x) = \dfrac{\sin t}{t^2+x^2}$ est continue par morceaux par rapport à t et continue par rapport à x.

- $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\begin{aligned} |f(t,x)| &= \left|\frac{\sin t}{t^2+x^2}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{t^2+x^2} \\ &\leqslant \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ diverge.
Mais si on se limite à $x \in]a,+\infty[$ avec $a > 0$, il vient :

$$\left|\frac{\sin t}{t^2+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2+a^2} \text{ intégrable ind}^{\text{t}} \text{ de } x$$

$\Rightarrow F$ est continue sur $]a,+\infty[$, et ce $\forall a > 0$, donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2e) Dérivation des intégrales à paramètres

Ici $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.
On pose (si possible) :

$$\forall x \in J, \quad F(x) = \int_I f(t,x)\mathrm{d}t$$

et on veut dériver F : pour ce faire, on fixe $a \in J$ et on cherche

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h} = \int_I \frac{f(t,a+h)-f(t,a)}{h}\mathrm{d}t$$

et pour ce faire, on discrétise en prenant une suite de réels (h_n) tendant vers 0...

Théorème

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$ où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.
On suppose :

- $\forall x \in J$, $f(\cdot,x)$ est continue par morceaux.
- $\forall x \in J$, $\displaystyle\int_I f(t,x)\mathrm{d}t$ converge.

Ce qui permet de poser

$$\forall x \in J, \quad F(x) = \int_I f(t,x)\mathrm{d}t$$

On suppose alors :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe en tout point de $I \times J$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cdot,x)$ est continue par morceaux $\forall x \in J$.

Hypothèse lourde :

Il existe une fonction φ, indépendante de x, intégrable sur I, tq

$$\forall (t,x) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Hypothèse inutile (!)

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,\cdot)$ est continue $\forall t$.

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et peut être dérivée sous le signe $\int$:

$$\forall x \in J, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\mathrm{d}t$$

Rq : Sans l'hypothèse inutile, F ne sera que dérivable au lieu d'être $\mathcal{C}^1$.
Elle est donc demandée si l'on veut F de classe $\mathcal{C}^1$.

3e) Exemples

ex 1 : Retour à $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

On a vu que F était continue sur $\mathbb{R}^+$.

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \end{cases}$$

Évidemment, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe en tout point de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{-t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$, fonction qui est continue par morceaux selon t, et continue selon x.

Mais :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant \frac{t}{1+t^2} \text{ qui n'est pas sommable sur } \mathbb{R}^+ \,!$$

Limitons-nous à $x \in]a,+\infty[$ avec $a > 0$.

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times]a,+\infty[, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant \frac{t}{1+t^2}\mathrm{e}^{-at} \leqslant \mathrm{e}^{-at} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}^+ \text{ et ind}^{\mathrm{t}} \text{ de } x$$

On en déduit F est de classe $\mathcal{C}^1$ et peut être dérivée sous le signe $\displaystyle\int$ sur $]a,+\infty[$ et ce $\forall a > 0$.

$\Rightarrow F$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

ex 2 : On pose, quand c'est possible,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2tx)\mathrm{d}t$$

On posera :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2tx) \end{cases}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(\cdot,x)$ est continue par morceaux.
- $|\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2tx)| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$ d'intégrale convergente.

$\Rightarrow F(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$.

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe en tout point de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -2t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2tx)$$

  Et cette fonction est continue par morceaux selon t, continue selon x.

- $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant 2t\mathrm{e}^{-t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ind[t] de x.

F est de classe $\mathcal{C}^1$ et peut-être dérivée sous le signe $\displaystyle\int$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} -2t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2tx)\mathrm{d}t$$

On va intégrer ce machin par parties : attention, après avoir dérivé par rapport à x, les dérivations ici se font par rapport à t.
Alors :

$$F'(x) = \left[\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2tx)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}2x\cos(2tx)\mathrm{d}t$$

(Le crochet a bien un sens, cela valide l'intégration par parties.)
Finalement,

$$F'(x) = -2xF(x)$$

Équadiff linéaire du 1er ordre :

$$F(x) = c\mathrm{e}^{-x^2}$$

Or $F(0) = \displaystyle\int_9^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2tx)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$$

ex 3 : L'intégrale de Gauss.
On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t \qquad\qquad G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
Soit :

$$f : \begin{cases} [0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \end{cases}$$

- f est continue par morceaux selon t.
- $\displaystyle\int_0^1 f(t,x)\mathrm{d}t$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$ (elle est propre).

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe en tout point de $[0,1]\times\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)} \text{ est continue par morceaux selon } t\text{, continue selon } x$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| &\leqslant 2|x|\mathrm{e}^{-x^2} \text{ fonction bornée sur } \mathbb{R}\\ &\leqslant M \text{ intégrable sur } [0,1]\end{aligned}$$

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ et peut se dériver sous le signe $\displaystyle\int$:

$$\begin{aligned}F'(x) &= \int_0^1 -2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\\ &= -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\mathrm{d}t \qquad u = xt\\ &= -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\\ &= -2G'(x)G(x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists c\in\mathbb{R}/\ \forall x,$

$$F(x) = c - G^2(x)$$

Pour $x=0$,

$$F(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} \qquad\qquad G(0) = 0$$

$\Rightarrow \forall x,$

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - G^2(x) \tag{$\ast$}$$

Mais,

$$0 \leqslant F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = \int_0^{+\infty} {}^{\backprime}e^{-t^2}\mathrm{d}t.$
$x \longrightarrow +\infty$ dans $(\ast)$ et il vient :

$$\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

<u>ex 4</u> : On considère un rectangle du plan $[a,b]\times[c,d]$ et $f : [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue.
Il s'agit de prouver la formule de Fubini :

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

f étant continue sur le compact $[a, b] \times [c, d]$, elle y est bornée.
Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall (u, v) \in [a, b] \times [c, d], \quad |f(u, v)| \leqslant M$$

Posons, pour $x \in [a, b]$:

$$F(x) = \int_a^x \underbrace{\left(\int_c^d f(u, v)\mathrm{d}v\right)}_{g(u)}\mathrm{d}u$$

La domination $|f(u, v)| \leqslant M$ ainsi que la continuité de f donnent la continuité de g (théorème de continuité).
Mais :

$$F(x) = \int_a^x g(u)\mathrm{d}u$$

Et g est continue, donc F est dérivable, et :

$$\forall \in [a, b], \quad F'(x) = g(x) = \int_c^d f(x, v)\mathrm{d}v$$

Posons :

$$G(x) = \int_c^d \left(\int_a^x f(u, v)\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}v$$

Dériver G, c'est dériver sous le signe $\displaystyle\int$: on vérifie les hypothèses du théorème.

-
-
-
-
-

Alors $G'(x) = \displaystyle\int_c^d \left(\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x f(u, v)\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}v$.

$$\Rightarrow \; G'(x) = \int_c^d f(x, v)\mathrm{d}v$$

Donc $F' = G'$.
Mais $F(a) = G(a) = 0$.

$$\Rightarrow \; F = G$$

$$\Rightarrow \; F(b) = G(b)$$

4e) Étude de la fonction Γ

On a vu que :

- $\forall x > 0, \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$
- $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$

Posons :

$$f:\left\{\begin{array}{rcl}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\end{array}\right.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe en tout point de $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)=\mathrm{e}^{-t}\ln t\, t^{x-1}$$

est continue par morceaux selon t et continue selon x.

Domination :

On se limite à $x\in]a,A[$ avec $0<a<A<+\infty$.

Pour $t\in]0,1]$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| &= \mathrm{e}^{-t}|\ln t|t^{x-1}\\ &\leqslant |\ln t|t^{x-1}\\ &\leqslant |\ln t|t^{a-1}=\frac{|\ln t|}{t^{1-a}}\end{aligned}$$

Si $\delta\in]1-a,1[$,

$$t^{\delta}\frac{|\ln t|}{t^{1-a}}=t^{\delta-(1-a)}|\ln t|\xrightarrow[t\to 0]{}0$$

$\Rightarrow$ Pour t assez petit,

$$\begin{aligned}&0\leqslant\frac{|\ln t|}{t^{1-a}}\leqslant\frac{1}{t^{\delta}}\text{ et }\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^{\delta}}\text{ converge}\\ &\Rightarrow\int_0^1\frac{|\ln t|}{t^{1-a}}\mathrm{d}t\text{ converge.}\end{aligned}$$

Pour $t\in]1,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\leqslant\mathrm{e}^{-t}\ln t\, t^{A-1}$$

Pour t assez grand,

$$\begin{aligned}&0\leqslant\mathrm{e}^{-t}\ln t\, t^{A-1}\leqslant\frac{1}{t^2}\\ &\Rightarrow\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln t\, t^{A-1}\mathrm{d}t\text{ converge.}\end{aligned}$$

Récapitulons :

Posons $\varphi(t)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{|\ln t|}{t^{1-a}}\text{ si }0<t\leqslant 1\\[2ex] \mathrm{e}^{-t}\ln t\, t^{A-1}\text{ si }t>1\end{array}\right.$.

φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi$ converge.

Enfin,

$$\forall(t,x)\in\mathbb{R}^{+*}\times]a,A[,\quad\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\leqslant\varphi(t)$$

Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,A[$ et peut y être dérivée sous signe $\displaystyle\int$, et ce $\forall a,A$...

Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0$,

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \, t^{x-1} \mathrm{d}t$$

Observons que les majorations effectuées avec $\ln t$ marchent sans modification avec $|\ln t|^p$.
En effet, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln t|^p}{t^{1-a}} \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} (\ln t)^p t^{A-1} \mathrm{d}t$ <u>convergent</u>.
Bref, on peut dériver Γ à tout ordre sous le signe $\displaystyle\int$:

Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} (\ln t)^p t^{x-1} \mathrm{d}t$$

En particulière, $\Gamma'' \geqslant 0$, Γ est convexe.

	0	1	c	2	$+\infty$
Γ''	$\Vert$		$+$		
Γ'	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
Γ'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Γ	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \;\Rightarrow\; \exists c \in]1,2[/ \quad \Gamma'(x) = 0 \quad \text{(Rolle.)}$$

Γ croît sur $]c, +\infty[$, donc possède une limite en $+\infty$.

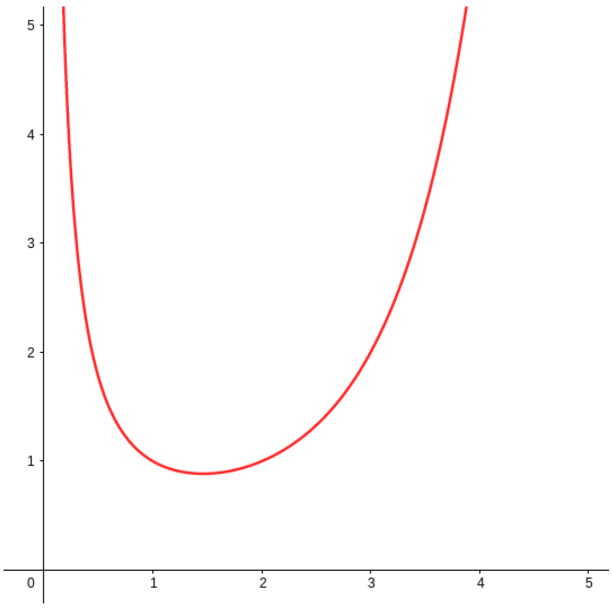
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n! \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$$

Pour $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\Gamma(1)}{x} \qquad (\Gamma \text{ continue en } 1)$$

$$\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$



Compléments

1e) On peut prouver que $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \mathrm{d}t = -\gamma$ (γ cste d'Euler).
Donc, au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \frac{\Gamma(x+1)}{x}\\ &= \frac{\Gamma(1) + x\Gamma'(1) + o(x)}{x}\\ &= \frac{1}{x} - \gamma + o(1)\end{aligned}$$

$$\Gamma(x) \underset{0^+}{=} \frac{1}{x} - \gamma + o(1)$$

2e) Γ est logarithmiquement convexe i.e $\ln \Gamma$ est convexe.
En effet :

$$\begin{aligned}\left(\Gamma'(x)\right)^2 &= \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t\, t^{x-1} \mathrm{d}t\right)^2\\ &= \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \ln t\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \mathrm{d}t\right)^2\end{aligned}$$

Mais (Cauchy-Schwarz) :

$$\left(\int fg\right)^2 \leqslant \int f^2 \times \int g^2$$

$$\Rightarrow \left(\Gamma'(x)\right)^2 \leqslant \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}}\right)^2 \mathrm{d}t \times \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \ln t\, t^{\frac{x-1}{2}}\right)^2 \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

$$\Rightarrow \Gamma'^2 \leqslant \Gamma\Gamma''$$

Donc $(\ln \Gamma)'' = \dfrac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} \geqslant 0$.

3e) Stirling :

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x \sqrt{2\pi x}$$

4e) Formule des compléments

$$\forall x \in]0,1[, \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

III. Intégration terme à terme des séries des fonctions

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.
On suppose :

1e) $\forall n$, u_n est continue par morceaux.

2e) $\sum u_n$ converge simplement sur I.

3e) La fonction $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue par morceaux sur I.

4e) $\forall n$, $\int_I |u_n|$ converge.

→ 5e) $\sum \int_I |u_n|$ converge.

Alors S est intégrable sur I et

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(t)\mathrm{d}t$$

Rq1 : Le résultat de l'intégration terme à terme donne $\int_I S(t)\mathrm{d}t$ sous forme d'une série qui n'est pas celle qui doit converger pour assurer l'hypothèse 5e).
(sauf dans le cas où les u_n sont positifs)

Rq2 : Le théorème donne $\int_I S$ sous forme d'une série absolument convergente.

Rq3 : Il s'agit de la copie conforme du théorème de Fubini, si l'on remplace $\sum$ par $\int$.

ex 1 : Calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t$

En 0 : $\frac{t}{\mathrm{e}^t-1} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ Faux problème.

En $+\infty$: $\frac{t}{\mathrm{e}^t-1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

L'intégrale I converge.

On écrit :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t \qquad \text{(car } 0<\mathrm{e}^{-t}<1 \text{ pour } t>0\text{)} \\
&= \int_0^{+\infty}\Bigg(\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{t\mathrm{e}^{-(n+1)t}}_{u_n(t)}\Bigg)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

- Les u_n sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $t \longmapsto \dfrac{t}{\mathrm{e}^t-1}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Pour $n \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |t\mathrm{e}^{-(n+1)t}|\mathrm{d}t$ converge.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty}|u_n| = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = \left[-t\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t}}{n+1}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}$

Finalement, $\displaystyle\sum\int_0^{+\infty}|u_n|$ converge, on peut intégrer terme à terme.

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \\
I &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

ex 2 : On pose, quand c'est possible :

$$I(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \qquad\qquad \text{pour } x>0$$

En 0 : $\mathrm{e}^{-xt}\dfrac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$, il y a un faux problème.
En $+\infty$: $\mathrm{e}^{-xt}\dfrac{\sin t}{t} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

$$\Rightarrow\ I(x) \text{ existe pour } x>0$$

On peut envisager deux méthodes pour calculer $I(x)$:

1e) Le calcul de $I'(x)$.

2e) On écrit :

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}\mathrm{e}^{-xt}}{(2n+1)!}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

- Les u_n sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers $t \longmapsto \mathrm{e}^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$ qui est continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n|$ converge $\forall n \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |u_n| &= \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t \\
v = xt &= \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{v^{2n}}{x^{2n}}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{x^{2n+1}}\Gamma(2n+1) \\
&= \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} \text{ série convergente pour } x > 1
\end{aligned}$$

On peut donc intégrer terme à terme pour $x > 1$, et $\forall x > 1$,

$$\begin{aligned}
I(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} \\
&= \arctan\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

<u>ex 3</u> : On pose, quand c'est possible,

$$\text{pour } t \geqslant 0, \quad f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3+t^3}$$

On pose, $\forall t \geqslant 0$,

$$u_n(t) = \frac{1}{n^3+t^3}$$

$\forall t \geqslant 0, \quad |u_n(t) \leqslant \dfrac{1}{n^3}$, ce qui assure la convergence de la série définissant $f(t)$;
Cela prouve aussi que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$, les u_n sont continues, donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
Évidemment, $\forall n$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n|$ converge et :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |u_n| &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{n^3+t^3} \\
&= \frac{1}{n^3}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{n^3+t^3} \qquad u = \frac{t}{n} \\
&= \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3} \\
&= \frac{\lambda}{n^2} \text{ avec } \lambda = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3}
\end{aligned}$$

Bref, $\sum \int_0^{+\infty} |u_n|$ converge.
Alors, $\int_0^{+\infty} f$ converge et :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \lambda \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

Rq : Une petite ruse pour calculer λ :

$$\begin{aligned}\lambda &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3} \qquad t = \frac{1}{u} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}t}{t^2}}{1+\frac{1}{t^3}} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{1+t^3} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{d}u}{1+u^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ 2\lambda &= \int_0^{+\infty} \frac{1+u}{1+u^3}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+u+1} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\left(u-\frac{1}{1}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{u-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\underbrace{\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}}_{\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

ex 4 : Soit la série entière $\sum (-1)^n \frac{t^n}{\ln n}$.

Son rdc vaut 1, et la série converge pour $t=1$ car $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge (théorème des séries alternées).
La somme $S(t)$ de cette série converge pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.
Le cours sur les séries entières nous dit que S est continue sur $[0,1[$.
Si l'on pose $u_n(t) = (-1)^n \frac{t^n}{\ln n}$.

Ici, puisque $|u_n(t)| \underset{n}{\searrow} 0$, le théorème des séries alternées nous dit :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{t^k}{\ln k}\right| &\leqslant \frac{t^{n+1}}{\ln(n+1)}\\ &\leqslant \frac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow{\text{ind}^{t} \text{ de } t} 0\end{aligned}$$

La convergence de $\sum u_n$ est uniforme sur $[0,1]$, les u_n sont continues en 1, donc S est continue en 1.
Donc $\displaystyle\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t$ existe sans problème, c'est une intégrale propre.
Peut-on la calculer en intégrant terme à terme ?

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u_n| &= \int_0^1 \frac{t^n}{\ln n}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{(n+1)\ln n}\\ &\sim \frac{1}{n\ln n} \geqslant 0\end{aligned}$$

Et $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ diverge.
Le théorème ne s'applique pas.
Mais les u_n sont continues sur $[0,1]$ et la convergence de $\sum u_n$ y est uniforme.
$\Rightarrow$ Le théorème <u>élémentaire</u> d'intégration terme à terme s'applique et on peut écrire :

$$\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$$

<u>Conclusion</u> : contrairement à ce qu'il se passe pour les suites de fonctions où Lebesgue entrainait élémentaire, ici ce n'est plus le cas.

IV. Complément

Il s'agit de dériver à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ sous le signe $\int$.

Théorème

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{K}$.
On suppose :

1^e) $\forall x \in J$, $f(\cdot, x)$ eſt continue par morceaux et d'intégrale convergente sur I.

On peut alors poser, pour $x \in J$,

$$F(x) = \int_I f(t,x)\mathrm{d}t$$

2^e) On suppose que f possède des dérivées par rapport à x jusqu'à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ inclus en tout point de $I \times J$.

3^e) $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ eſt continue par morceaux selon t et continue selon x.

4^e) $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\exists \varphi_k$ sommable sur I telle que :

$$\forall (t,x) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)\right| \leqslant \varphi_k(t)$$

Alors F eſt de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et $\forall k \in [\![0,p]\!]$, $\forall x \in J$,

$$F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)\mathrm{d}t$$