COURBES PARAMÉTRÉES

1. On considère l'ensemble (C) des points $M(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\begin{cases} x(t)=t+\dfrac{1}{1+t} \\ y(t)=t^2-2t \end{cases}$$

a. Dresser les tableaux de variations des fonctions x et y.

b. Déterminer une asymptote de (C).

c. Déterminer la limite, quand $t\to\pm\infty$, de $\dfrac{y}{x}$. Qu'en déduire ?

d. Tracer la courbe (C).

---

2. On considère l'ensemble (C) des points $M(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ y(t)=\dfrac{3}{t^2-4} \end{cases}$$

a. Comparer les points $M(t)$ et $M(-t)$. Qu'en déduire concernant la courbe (C) ? Dans quel intervalle peut-on se contenter de faire varier la variable t ?

b. Dresser les tableaux de variations des fonctions x et y sur l'intervalle précédemment choisi.

c. Déterminer, quand $t\to+\infty$, la limite du quotient $\dfrac{y}{x}$. Que peut-on en déduire ?

d. Tracer la courbe (C).

---

3. Déterminer le lieu des projections orthogonales du point $(-1,0)$ sur les tangentes au cercle unité.
Calculer la longueur de cette courbe.

---

4. On considère l'ensemble (C) des points $M(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\begin{cases} x(t)=2t+t^2 \\ y(t)=2t-\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

a. Dresser les tableaux de variations des fonctions x et y.

b. Déterminer $m=\lim\limits_{t\to-1}\dfrac{y(t)+3}{x(t)+1}$. Que peut-on en déduire ?

c. Tracer (C).

d. Déterminer le point double de (C) (en d'autres termes, chercher les réels u et v avec $u\neq v$ tels que $M(u)=M(v)$.

---

5. On considère l'ensemble (C) des points $M(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\begin{cases} x(t)=\sin^3 t \\ y(t)=\cos t-\cos^4 t \end{cases}$$

a. Comparer les points $M(t)$, $M(t+2\pi)$ et $M(-t)$.

b. Sur quel intervalle peut-on se contenter de faire varier t ? Quelle transformation géométrique devra-t-on effectuer pour avoir la courbe (C) en entier ?

c. Tracer (C).

6. On considère l'ensemble (C) des points $M(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ de $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\begin{cases} x(t)=t^3-3t \\ y(t)=t^3-t^2-t \end{cases}$$

a. Étudier les branches infinies de (C).

b. Dresser les tableaux de variations des fonctions x et y et déterminer le ou le point stationnaire de (C).

c. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à (C) en son point stationnaire.

d. Déterminer le signe de $y-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}$ au voisinage de $t=1$. Que peut-on en déduire ?

c. Tracer (C).