On désigne par E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n ($n \geq 2$), et par Id_E l'application identité de E.

Un endomorphisme u de E est dit « nilpotent » si : $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$, 0 désignant l'endomorphisme nul de E. On définit alors « l'indice de nilpotence de u » comme le plus petit des entiers k tels que $u^k = 0$.

On définit de manière analogue une matrice carrée nilpotente et son indice de nilpotence.

Partie I

(*Exemple*)

On suppose dans cette partie que $n = 3$ et l'on fixe une base (i, j, k) de E. On considère l'endomorphisme u de E de matrice A dans la base (i, j, k) avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Déterminer le rang de u, une base de son noyau et une base de son image.

Les deux premières colonnes de A sont clairement indépendantes. Mais le calcul du déterminant de A (ou mieux, le constat que ses première et dernière colonnes sont opposées) prouve que A n'est pas inversible. Par suite, son rang vaut 2.

b. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\operatorname{Im} u = \left\{xi + yj + zk \ / \ ax + by + cz = 0\right\}$.

Les trois colonnes de A vérifient $x + z = 0$. L'image de u est donc incluse dans le plan d'équation $x + z = 0$. Pour des questions de dimensions, cette inclusion est une égalité.

2. Prouver que u est nilpotent, et déterminer son indice de nilpotence.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = 0.$$

3. Déterminer la matrice de u dans la base $(i + k, j, k)$.

$$u(i + k) = 0 \ ; \ u(j) = i + k \ ; \ u(k) = j.$$

La matrice demandée est donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. On pose $B = I_3 + A$. On se propose de prouver de plusieurs manières que B est inversible, et pour chacune d'entre elles de déterminer B^{-1} par la méthode appropriée.

a. Prouver que B est inversible par la méthode du pivot, et donner B^{-1}.

Je vous laisse le soin de faire les calculs (n'oubliez pas que l'on ne doit pas mélanger les opérations sur les lignes et les colonnes de A !).

b. Déterminer le noyau de $Id_E + u$, et ce en n'utilisant que le fait que u est nilpotent, en déduire que $Id_E + u$ est inversible et déterminer $(Id_E + u)^{-1}$ en résolvant l'équation $y = (Id_E + u)(x)$.

Si $x \in \ker(Id_E + u)$, $u(x) = -x \Rightarrow u^2(x) = -u(x) = x \Rightarrow 0 = u^3(x) = u(x) = -x$. *On en déduit que* $Id_E + u$ *est inversible. Par ailleurs :*

$$y = (Id_E + u)(x) \Rightarrow y = x + u(x) \Rightarrow u(y) = u(x) + u^2(x) \text{ et } u^2(y) = u^2(x) + 0 \Rightarrow y = x - u(x) + u^2(x).$$

Finalement, $(id_E + u)^{-1} = Id_E - u + u^2$

c. Calculer le déterminant de B, puis la valeur de B^{-1} *via* sa comatrice.

Ici aussi, je vous laisse le soin de faire les calculs.

5. **a.** Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3).$$

b. En déduire une matrice C *plausible* telle que $C^2 = B$, et vérifier que cette matrice convient.

En remplaçant x par A dans l'égalité précédente et en utilisant le fait que $A^3 = 0$, *on peut imaginer que* $C = I_3 + \frac{A}{2} - \frac{A^2}{8}$ *est un bon candidat pour vérifier* $C^2 = I_3 + A = B$. *On vérifie alors par un calcul direct que cette matrice convient.*

6. Soit $\mathcal{A} = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \ / \ AM = MA \right\}$.

a. Prouver que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et déterminer la forme générale des éléments de $\mathcal{A}$.

Il est clair que $\mathcal{A}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, *stable pour le produit. Soit alors une matrice 3-3 M quelconque :*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a+c & b \\ -e & d+f & e \\ -h & g+i & h \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ -a+g & -b+h & -c+i \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Il en résulta que $AM = MA$ *si et seulement si* $b = f = h = -d$, $a - e = -c = g$, $a + c = i$, *ou encore si et seulement si M est de la forme :*

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & a+c & b \\ c & -c & a+c \end{pmatrix}.$$

b. Déterminer la dimension de $\mathcal{A}$, et prouver que (I_3, A, A^2) est une base de $\mathcal{A}$.

La forme obtenue pour les éléments de $\mathcal{A}$ *permet de voir clairement que* $\mathcal{A}$ *est de dimension 3. Comme* I_3, A *et* A^2 *sont dans* $\mathcal{A}$ *et linéairement indépendantes, on en déduit que* (I_3, A, A^2) *est une base de* $\mathcal{A}$.

Partie II

(*Noyaux itérés*)

Soit v un endomorphisme de E. On pose, pour tout entier positif k :

$$N_k = \ker v^k \text{ et } I_k = \operatorname{Im} v^k.$$

7. **a.** Démontrer que la suite (N_k) est croissante au sens de l'inclusion.

Si $x \in N_k$, $v^{k+1}(x) = v(v^k(x)) = v(0) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}$.

b. Prouver l'existence d'un entier r tel que $N_r = N_{r+1}$.

La suite (d_k) des dimensions des N_k est une suite croissante d'entiers, majorée par la dimension de E, elle devient donc stationnaire. Du fait de l'inclusion des N_k, il existe donc un rang r à partir duquel les noyaux ne bougent plus.

c. Prouver que si p est un entier tel que $N_p = N_{p+1}$, alors $N_{p+1} = N_{p+2}$.

On connaît l'inclusion $N_{p+1} \subset N_{p+2}$. Inversement :

$$x \in N_{p+2} \Rightarrow 0 = v^{p+1}(v(x)) \Rightarrow v(x) \in N_{p+1} = N_p \Rightarrow v^p(v(x)) = 0 \Rightarrow x \in N_{p+1}.$$

d. Concrètement, qu'a-t-on prouvé concernant la suite (N_k) ?

On sait qu'il existe entier r tel que $N_r = N_{r+1}$. *La question précédente prouve que dès qu'il y a deux noyaux consécutifs égaux, les noyaux ne bougent plus. Il y a donc croissance stricte des N_k jusqu'à un rang où ils stagnent définitivement.*

8. Énoncer des résultats analogues concernant les images I_k des v^k.

$$x \in I_{k+1} \Leftrightarrow \exists y \in E,\ x = v^{k+1}(y) = v^k(v(y)) \Rightarrow x \in I_k.$$

La suite (I_k) décroît donc au sens de l'inclusion. En utilisant la formule du rang, on voit alors que cette suite va commencer par décroître strictement puis stagner, et ce à partir du même seuil que les N_k.

9. On note s le plus petit entier tel que $N_s = N_{s+1}$.

a. Prouver que $s \leq n$ (on pourra envisager deux cas suivant que v est inversible ou non).

Si v est inversible, ses puissances aussi et tout les N_k se réduisent à $\{0\}$: $s = 1$.

Sinon, N_1 est au moins de dimension 1. Comme les inclusions de N_1 jusqu'à N_s sont strictes, on en déduit que N_s est au moins de dimension s. Alors $s \leq \dim N_s \leq n$.

b. Prouver que $I_s = I_{s+1}$.

*Déjà dit à la question **8.**.*

c. Prouver que l'on a $E = \ker v^n \oplus \operatorname{Im} v^n$.

On sait déjà que $\dim(\ker v^n) + \dim(\operatorname{Im} v^n) = \dim E$. De plus, si $x \in \ker v^n \cap \operatorname{Im} v^n$, alors il existe y dans E tel que $x = v^n(y)$. Il vient donc $0 = v^n(x) = v^{2n}(y) \Rightarrow y \in N_{2n} = N_n \Rightarrow x = v^n(y) = 0$.

10. Pour k entier quelconque, on note $\delta_k = \dim I_k - \dim I_{k+1}$.

a. Établir l'existence d'un sous-espace vectoriel D_k de E tel que $I_k = I_{k+1} \oplus D_k$ et donner sa dimension.

I_{k+1} est un sous-espace vectoriel de I_k, il possède donc un supplémentaire dans I_k. La formule de Grassmann donne immédiatement que la dimension de D_k vaut δ_k.

b. Prouver que $I_{k+1} = I_{k+2} + v(D_k)$.

Soit $x \in I_{k+1}$: on écrit $x = v^{k+1}(y) = v(v^k(y))$; comme $v^k(y) \in I_k$, on peut écrire $v^k(y) = v^{k+1}(z) + d_k$ avec $d_k \in D_k$. Finalement, $x = v^{k+2}(z) + v(d_k) \in I_{k+2} + v(D_k)$. Inversement, $I_{k+2} \subset I_{k+1}$ et $v(D_k) \subset v(I_k) = I_{k+1}$ donc $I_{k+2} + v(D_k) \subset I_{k+1}$

c. En déduire que la suite (δ_k) décroît. Qu'a-t-on prouvé ?

Prenons les dimensions dans l'égalité précédente :

$$\dim I_{k+1} \leq \dim I_{k+2} + \dim v(D_k) \Rightarrow \delta_{k+2} \leq \dim v(D_k) \leq \dim D_k = \delta_k.$$

*Cette inégalité dit que $\dim I_k - \dim I_{k+1} \geq \dim I_{k+1} - \dim I_{k+2}$: la suite $(\dim I_k)$ est **convexe**.*

Partie III

(*Propriétés élémentaires des endomorphismes nilpotents*)

11. Soit u un endomorphisme non nul de E, que l'on suppose nilpotent. On note p son indice de nilpotence.

a. Prouver l'existence d'un vecteur a de E tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.

Par définition, p est le plus petit indice tel que $u^p = 0$. *Alors* $u^{p-1} \neq 0$, *d'où le résultat.*

b. Prouver que la famille $(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a))$ est libre.

Supposons $\alpha_0 a + \alpha_1 u(a) + \ldots + \alpha_{p-1} u^{p-1}(a) = 0$. *On compose par* u^{p-1} *et il vient* $\alpha_0 u^{p-1}(a) = 0$, *soit* $\alpha_0 = 0$. *On recommence alors en composant par* u^{p-2} *et ainsi de suite.*

c. En déduire que $p \leq n$, puis que $u^n = 0$.

Une famille libre possède moins d'éléments que la dimension de l'espace.

On en déduit que $u^n = u^{n-p} \circ u^p = 0$.

d. Application

On désigne par n l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prouver que n est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

On voit aisément que $n^2 \neq 0$ et $n^3 = 0$

On suppose qu'il existe un endomorphisme r de $\mathbb{C}^3$ tel que $r^2 = n$. Prouver que r est nilpotent, et justifier que la considération de r^4 conduit à une contradiction.

Si $r^2 = n$, *alors* $r^6 = 0$ *: r est nilpotent. Alors, d'après la question* ***11.c.*** *et puisque l'on est en dimension 3,* $r^3 = 0$. *C'est évidemment impossible puisque* $r^4 = n^2 \neq 0$.

12. Soit u un endomorphisme de E.

Prouver que s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, alors u est nilpotent.

13. *On admet dans cette question la réciproque du résultat précédent, à savoir que tout endomorphisme nilpotent possède, dans une bonne base, une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.*

Soient u et n deux endomorphismes de E tels que : n est nilpotent ; u et n commutent ($u \circ n = n \circ u$).

Il s'agit de prouver que $\det(u+n) = \det(u)$.

a. On suppose dans cette question que u est inversible.

Prouver que u^{-1} et n commutent, puis que $u^{-1} \circ n$ est nilpotent. En déduire la valeur de $\det(I + u^{-1} \circ n)$, puis le résultat énoncé.

On compose à droite et à gauche par u^{-1} *l'égalité* $u \circ n = n \circ u$ *et l'on voit ainsi que* u^{-1} *et n commutent. Alors, si l'on désigne par p l'indice de nilpotence de n, il vient* $(u^{-1} \circ n)^p = u^{-p} \circ n^p = 0$. *Finalement, dans une bonne base, la matrice de* $u^{-1} \circ n$ *est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale, celle de* $I + u^{-1} \circ n$ *est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc :*

$$\det(u+n) = \det(u) \times \det(I + u^{-1} \circ n) = \det u.$$

b. On suppose dans cette question que u n'est pas inversible.

Prouver que le noyau de u est stable par n, et que si n' désigne la restriction de n au noyau de u, alors n' est nilpotent. En déduire l'existence d'un vecteur a non nul tel que $u(a) = n(a) = 0$, puis conclure.

Si $x \in \ker u$, $u(n(x)) = n(u(x)) = 0$: $n(x) \in \ker u$. *Bien évidemment,* n' *étant une restriction d'un machin nilpotent, elle est elle-même nilpotente ! Il en résulte que* n' *ne saurait être inversible, il existe donc un élément non nul* a *dans le noyau de* n' *et ce* a *est fatalement dans* $\ker u$. *Alors* $(u+n)(a) = 0$, $u+n$ *n'est pas inversible donc son déterminant est nul.*

Partie IV

(*Représentation matricielle des endomorphismes nilpotents en dimension 2 et 3*)

On fixe dans toute cette partie un endomorphisme u de E, que l'on suppose nilpotent et non nul.

14. On suppose dans cette question que $n = \dim E = 2$.

a. En considérant un vecteur a tel que $u(a) \neq 0$ et en utilisant les résultats de la question **III.11.b.**, prouver l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $u(a) \neq 0$, *on sait que la famille* $(u(a), a)$ *est une base, base dans laquelle la matrice de* u *est celle de l'énoncé puisque* $u^2 = 0$.

b. Que peut-on dire de deux matrices 2-2 nilpotentes et non nulles ?

Elles sont semblables puisqu'elles sont toutes deux semblables à la même troisième (celle de la question précédente).

15. On suppose dans cette question que $n = \dim E = 3$.

a. Prouver que le rang de u vaut 1 ou 2.

Le rang de u *ne vaut pas 0 puisque* u *est non nul et pas 3 puisque* u *n'est pas inversible.*

b. On suppose que u est de rang 1.

Donner les dimensions des noyaux de u et de u^3 . En déduire que l'indice de nilpotence de u est égal à 2 (penser aux noyaux itérés).

Le noyau de u *est de dimension 2. Si* $u^2 \neq 0$, *le noyau de* u^2 *est encore de dimension 2 et les noyaux itérés vont définitivement stagner. C'est impossible puisque* $u^3 = 0$.

Prouver alors l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On choisit a *tel que* $u(a) \neq 0$. *On vient de voir que* $u^2(a) = 0$, *donc que* $u(a) \in \ker u$ *lequel est de dimension 2. On choisit alors un vecteur* b *complétant* $u(a)$ *en une base de* $\ker u$, *on vérifie que la famille* $(b, u(a), a)$ *est libre ; dans cette base, la matrice de* u *est bien celle de l'énoncé.*

c. On suppose que u est de rang 2.

Prouver que $u^2 \neq 0$. En déduire l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $u^2 = 0$, $\operatorname{Im} u \subset \ker u$ *ce qui va s'avérer compliqué vu que* $\operatorname{Im} u$ *est de dimension 2 et* $\ker u$ *de dimension 1.*

On choisit alors a tel que $u^2(a) \neq 0$, on sait que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est libre et la matrice de u dans cette base est celle de l'énoncé puisque $u^3 = 0$.

16. <u>Exemple</u>

On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer simplement, et à peu de frais, un scalaire λ tel que $v = u - \lambda I$ soit nilpotent.

D'après le résultat admis dans la question ***13.****, un endomorphisme nilpotent possède une trace nulle. Pour que v soit nilpotent, il est donc nécessaire que $\operatorname{tr} v = \operatorname{tr} u - 3\lambda = 0$, soit $\lambda = 2$. On vérifie alors à la main que, réciproquement, $U - 2I_3$ est bien nilpotente.*

b. Déterminer une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de v est l'une des deux matrices M ou N.

On détermine l'indice de nilpotence de $V = U - 2I_3$ qui ici vaut 2. On suit alors la démarche de la question ***15.c.****.*

c. En déduire un mode de calcul de la matrice U^k pour k élément de $\mathbb{N}$.

Si l'on a fait les calculs de la question précédente, on a trouvé une matrice inversible P telle que $V = PNP^{-1}$. Alors $U^k = P(2I_3 + N)^k P^{-1}$. Mais les puissances de $2I_3 + N$ se calculent bien grâce à la formule du binôme, laquelle est utilisable puisque $2I_3$ et N commutent. Plus précisément, vu que $N^3 = 0$, il vient :

$$(2I_3 + N)^k = 2^k I_3 + k2^{k-1} N + \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} N^2 .$$

Partie V

(*Commutateurs*)

17. On note Z_n le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices de trace nulle.

a. Justifier brièvement que Z_n est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et en donner la dimension.

On peut voir Z_n comme le noyau de la forme linéaire non nulle qu'est la trace, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Prouver que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls est dans Z_n.

Deux matrices semblables ont même trace et la trace d'une matrice à diagonale nulle est nulle !

c. Soit, réciproquement, une matrice M non nulle de trace nulle, et m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice M dans la base canonique.

Prouver que m n'est pas une homothétie, puis qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de m possède un 0 en position 1-1.

Si m est l'homothétie de rapport non nul λ, sa trace vaut $n\lambda$ qui est non nul.

m n'étant pas une homothétie, il existe des éléments de $\mathbb{C}^n$ qui ne sont pas vecteurs propres de m. Si e_1 désigne un tel vecteur et si l'on pose $e_2 = m(e_1)$, alors la famille (e_1, e_2) est libre et l'on peut la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$; dans cette base, la première colonne de la matrice de m commence par un 0, puis un 1, puis des zéros.

Grâce à un raisonnement par récurrence, prouver alors l'existence d'une base $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de m ne possède que des zéros sur sa diagonale.

Écrivons la matrice de m dans la base précédemment évoquée :

$$\begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ 1 & \\ \vdots & \boxed{A} \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Envisageons maintenant l'endomorphisme v de $F = \mathrm{vect}(e_2,\dots,e_n)$ de matrice A dans la base $(e_2,\dots,e_n)$. Alors $\mathrm{tr}\, v = \mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, m = 0$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$ de F dans laquelle la matrice V de v est à diagonale nulle. Si l'on écrit maintenant la matrice de m dans la base $(e_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$, on voit (surtout si l'on a pigé la récurrence du théorème de trigonalisation !) qu'elle est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & L_2 \\ C_1 & \boxed{V} \end{pmatrix}.$$

Toute matrice de trace nulle est donc semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls (ces dernières matrices constituent un ensemble que l'on notera D_n dans la suite).

d. Quelle est la dimension de D_n (dont il est trivial que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$!) ?

$n^2 - n$, question délicate !

e. On note D la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1,2,\dots,n)$.

Prouver que toute matrice de D_n peut s'écrire $MD - DM$.

Considérons l'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à une matrice M associe $MD - DM$. Un calcul matriciel simple permet de voir que $\varphi(M)$ est une matrice à diagonale nulle, et que $\varphi(M) = 0$ si et seulement si M est diagonale. Le noyau de φ étant de dimension n, son image est de dimension $n^2 - n$. Or cette image est incluse dans D_n qui est lui-même de dimension $n^2 - n$. Il y a donc égalité entre $\mathrm{Im}\,\varphi$ et D_n.

f. En déduire que toute matrice de Z_n peut s'écrire $AB - BA$ où A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Une matrice T de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle, laquelle peut s'écrire $MD - DM$. Il vient donc :

$$T = P(MD - DM)\mathrm{P}^{-1} = PMDP^{-1} - PDMP^{-1} = PMP^{-1}PDP^{-1} - PDP^{-1}PMP^{-1} = AB - BA,$$

avec $A = PMP^{-1}$ et $B = PDP^{-1}$.